ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΓΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Οικονομικό ΑΣΟΕΕ (ΟΠΑ)

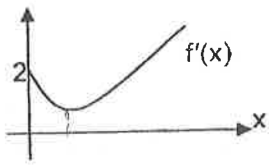
από G. Tsoutsinos Ph.D. (ImpCol)

2016-17

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2006

Α Μέρος

1. (α). Να δοθεί το γράφημα μιας συνάρτησης f(x) στο διάστημα , της οποίας η παράγωγος $x \geq 0$ έχει το γράφημα του παραπλεύρως σχήματος.



(β). Οι μεταβλητές {x,y} συνδέονται με την εξίσωση: $y^2 - \sqrt{x} = 0$. Να γίνει το γράφημα της εξίσωσης και να βρεθούν τα σημεία ισοελαστικότητας.

(γ). Να βρεθούν η γραμμική και η παραβολική προσέγγιση της συνάρτησης $f(x) = 1/(1+x)$ στο σημείο $x_0 = 0$.

(δ). Να βρεθεί η λύση της διαφορικής εξίσωσης: $y' = -xy$, που έχει θετικές τιμές: $y \geq 0$ και ικανοποιεί: $y(0) = 1$.

2. (α). Η εξίσωση $x^2 y + xz - z^2 = 2$, ορίζει πλεγμένα το z ως συνάρτηση των {x,y}. Να υπολογιστούν η παράγωγος και η ελαστικότητα του z ως προς x, στις τιμές: {x=1, y=2, z=1}.
(β). Η συνάρτηση f(x,y) είναι x - φθίνουσα, y - αύξουσα, και οιονεί κυρτή. Να δοθεί το γράφημα μιας ισοσταθμικής της.
(γ). Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί ως ακρότατο το στάσιμο σημείο της συνάρτησης $f(x,y) = 1 + 2x + 4y - ax^2 - y^2$, για τις διάφορες τιμές του α.
(δ). Να βρεθεί γραφικά και αναλυτικά στη θετική περιοχή: $x \geq 0$, $y \geq 0$, η λύση του προβλήματος: $\max\{f = \ln x + \ln y \,\|\, g = x + 2y = c\}$, και να επαληθευτεί η ερμηνεία του πολλαπλασιαστή Lagrange.

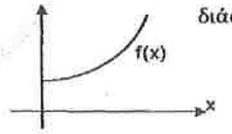
3. Μία επιχείρηση παράγει ποσότητα Q με:
α. Συνάρτηση εσόδων R(Q): αύξουσα κοίλη με R(0)=0.
β. Συνάρτηση κόστους C(Q): αύξουσα κυρτή με C(0)=0.
Αν υπόκειται και σε φορολογία t ανά μονάδα παραγόμενου προϊόντος, να διαπιστωθεί, γραφικά και αναλυτικά, ότι η παραγόμενη ποσότητα που μεγιστοποιεί το κέρδος είναι φθίνουσα συνάρτηση του συντελεστή φορολογίας t. Να διερευνηθεί και η περίπτωση που δεν θα υπάρξει παραγωγή αν η φορολογία είναι πολύ υψηλή.

4. Ένας ωρομίσθιος εργάζεται L ώρες ημερησίως, έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει την χρησιμότητα: $U = \ln C + \ln T$, όπου $C \geq 0$ είναι η ημερήσια κατανάλωση και $T = 16 - L$ ο ελεύθερος χρόνος. Εκτός από το ωρομίσθιο w, ο εργαζόμενος έχει επιπλέον ημερήσιο έσοδο e από ενοίκια. Να βρεθούν:
α. Η βέλτιστη ποσότητα εργασίας $L : 0 \leq L \leq 16$, ως συνάρτηση των παραμέτρων {w,e}.
β. Το γράφημα των ισοσταθμικών της U στο επίπεδο {C,T}. 3. Το γράφημα των ισοσταθμικών της U στο επίπεδο {C,L}.

Εξετάσεις Ιανουαρίου 2007

Α Μέρος

1. α) Η συνάρτηση *f(x)* έχει το παραπλεύρως γράφημα.
Να βρεθούν τα γραφήματα της μέσης τιμής: *Af(x)=f(x)/x* και του οριακού ρυθμού: *Mf(x)=f΄(x)*, στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.
β) Να βρεθεί συνάρτηση *y=y(x)* σταθερής ελαστικότητας: $\varepsilon=-1/3$, με τιμή $y_0=1$ όταν $x_0=8$.
γ) Να διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln(2-x^2)$ είναι κοίλη και να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της στο διάστημα: $-1 \leq x \leq 1$.
δ) Να βρεθεί η συνάρτηση *y(x)* που ικανοποιεί την εξίσωση: $y'=(x-1)y$ και έχει τιμή: $y(1)=1$.



2. α) Δίνεται $z=z(x,y)$ όπου $x=x(t)$ και $y=y(x)$. Να γίνει το δένδρο εξάρτησης και να διατυπωθούν οι αντίστοιχοι τύποι αλυσωτής παραγώγισης.
β) Να σκιαγραφηθεί η ισοσταθμική μιας συνάρτησης *f(x,y)* που είναι x-φθίνουσα, y-φθίνουσα και οιονεί κυρτή.
γ) Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το στάσιμο της συνάρτησης: $f(x,y)=1+x^2+xy$. Να βρεθεί και η μέγιστη τιμή της στο επίπεδο.
δ) Το πρόβλημα περιορισμένου ακρότατου: $\max\{f(x,y)=x^{1/2}y \,|\, g(x,y)=x+8y=12\}$ στη θετική περιοχή, έχει τη λύση: {x=4, y=1}. Να βρεθεί και να ερμηνευτεί ο αντίστοιχος πολλαπλασιαστής Lagrange.

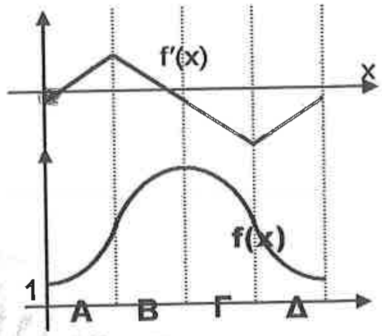
Μέρος Β

3. Σε μια εθνική οικονομία, το εθνικό εισόδημα *Y* αυξάνει συνεχώς με ετήσιο ρυθμό 4% και ο πληθυσμός *L* αυξάνει συνεχώς με ετήσιο ρυθμό 1%. Να βρεθούν τα παρακάτω:
α) Ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής του κατά κεφαλή εισοδήματος *y=Y/L*.
β) Το κατά κεφαλή εισόδημα μετά από μια δεκαετία, αν στην αρχή της δεκαετίας ήταν 10 χιλιάδες ευρώ, υποθέτοντας τους παραπάνω ρυθμούς σταθερούς.

4. Ένα μονοπώλιο που λειτουργεί μεγιστοποιώντας τα κέρδη του διαθέτει το προϊόν του σε δύο αγορές, σε ποσότητες {X,Y} με μοναδιαίες τιμές {V,W} και με εξισώσεις ζήτησης {V=1-2X, W=4-Y} αντίστοιχα και με ενιαίο συνολικό κόστος *C=2+2(X+Y)*.
   1. Να διατυπωθεί η συνάρτηση κέρδους και να σκιαγραφηθούν οι ισοσταθμικές της.
   2. Να βρεθούν αναλυτικά και γεωμετρικά οι ποσότητες διάθεσης στις δύο αγορές που μεγιστοποιούν το κέρδος.
   3. Να υπολογιστεί το κέρδος.

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2007

Α Μέρος

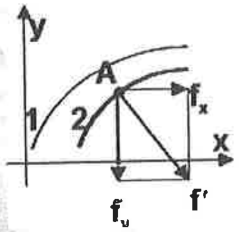


1. (α). Να δοθεί το γράφημα μιας συνάρτησης $f(x)$ της οποίας η παράγωγος έχει το γράφημα του παραπλεύρως σχήματος, και αρχική τιμή $f(0)=1$.

   (β). Οι μεταβλητές $\{x,y\}$ συνδέονται με την εξίσωση: $2x+3y=8$. Να υπολογιστεί η ελαστικότητα του x ως προς y όταν $y=2$.

   (γ). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)-ax$ στο θετικό διάστημα: $x\geq 0$. Να διαπιστωθεί ότι είναι κοίλη, και να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες το μέγιστό της βρίσκεται στο σύνορο: $x=0$.

   (δ). Να βρεθεί το γράφημα της συνάρτησης $f(x)=\min\{x^{-1},x^{-2}\}$ στο θετικό διάστημα, και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμά της στο μη φραγμένο διάστημα: $x\geq 1$.

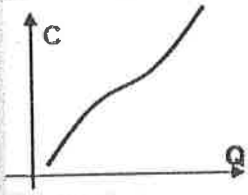


2. (α). Η εξίσωση $x^2y+xz-z^2=2$, ορίζει πλεγμένα το z ως συνάρτηση των $\{x,y\}$. Να υπολογιστούν η παράγωγος και η ελαστικότητα του x ως προς z, στις τιμές: $\{x=1,y=2,z=1\}$.

   (β). Η συνάρτηση $f(x,y)$ έχει τις ισοσταθμικές του παραπλεύρως σχήματος. Να βρεθούν τα πρόσημα των μερικών παραγώγων, καθώς και του ρυθμού υποκατάστασης στο σημείο A.

   (γ). Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή $Q=x^2+4y^2-4xy$. Να δοθεί ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας και να χαρακτηριστεί ως προς το πρόσημο.

   (δ). Θεωρούμε το πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης $\min\{x^2+y^2 \mid 2x+y=1\}$ στη θετική περιοχή: $\{x\geq 0,y\geq 0\}$. Να βρεθεί η λύση γραφικά και αναλυτικά.



3. Μια συνάρτηση κόστους της μορφής $C=\alpha Q^3+\beta Q^2+\gamma Q+\delta$ έχει το γράφημα του παραπλεύρως σχήματος. Να βρεθούν οι συνθήκες που θα πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$

4. Η δαπάνη για κάποιο αγαθό είναι $E=QP$, όπου P είναι η μοναδιαία τιμή του και Q η ποσότητα ζήτησης. Δίνεται ότι η τιμή αυξάνει με ρυθμό 1.5% ετησίως, και ότι η ελαστικότητα ζήτησης είναι $\varepsilon=-2$. Να εκτιμηθούν ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής της συνολικής δαπάνης, καθώς και το ύψος της συνολικής δαπάνης μετά την παρέλευση 3 ετών αν η τωρινή δαπάνη είναι $E_0=1$

Εξετάσεις Ιανουαρίου 2008

Α Μέρος

1. (α) Να δοθεί το γράφημα μιας συνάρτησης f(x) της οποίας η παράγωγος έχει το γράφημα του παραπλεύρως σχήματος και η αρχική τιμή f(0)=0

   (β) Να βρεθεί συνάρτηση f(x) σταθερής ελαστικότητας ε=1/2, με τιμή f(1)=3.

   (γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση f(x)=$\sqrt{x}-ax$ στο διάστημα: 0$\leq x\leq 1$. Να διατυπωθεί ότι είναι κοίλη, και να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες το μέγιστο της βρίσκεται στο δεξιό σύνορο: x=1

   (δ) να υπολογισθεί με ολοκλήρωμα και γεωμετρικά, το εμβαδό της περιοχής που βρίσκεται μεταξύ των ευθειών $\{2x-y=0,x+y=6\}$ και του y-άξονα. (4 μονάδες).

2. (α) Οι εξισώσεις $\{xy^2=s,2x+y=t\}$ ορίζουν πλεγμένα τα {x,y} ως συναρτήσεις των {s,t}. Να βρεθεί η μερική παράγωγος του x ως προς t χρησιμοποιώντας τους τύπους πλεγμένης παραγώγισης.

   (β) Να σκιαγραφηθεί στη θετική περιοχή η ισοσταθμική μιας συνάρτησης που είναι x-φθίνουσα, y-αύξουσα, και οιονεί κυρτή.

   (γ) Θεωρούμε την τετραγωνική συνάρτηση: f(x,y)=$1-6x+x^2+y^2-4xy$. Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το στάσιμο σημείο της. Τι μορφή έχει η ισοσταθμική που διέρχεται από το στάσιμο σημείο;

   (δ) Να βρεθούν η λύση και ο πολλαπλασιαστής Lagrange για το καθένα από τα παρακάτω προβλήματα περιορισμένης βελτιστοποίησης στη θετική περιοχή: max{2lnx+lny| | 2x+y=6}, max$\{xy^{\frac{1}{2}}||2x+y=6\}$ (4 μονάδες)

3. Δύο παράγωγοι παράγουν το ίδιο προϊόν σε ποσότητες {x,y}, με αντίστοιχο κόστος παραγωγής: {C1=4X, C2=6+2Y}. Η μοναδιαία τιμή του P καθορίζεται από τη συνολικά παραγόμενη ποσότητα Q=X+Y, σύμφωνα με την εξίσωση ζήτησης: P=10-Q. Να βρεθούν οι παραγόμενες ποσότητες αν οι δυο παραγωγοί συνεννοούνται ώστε αν μεγιστοποιήσουν το συνολικό κέρδος. (1 μονάδα)

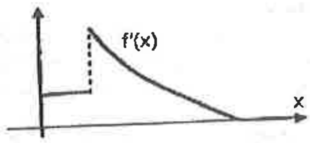
4. (α) Ένα μονοπώλιο παράγει ποσότητα Q την οποία διαθέτει με τιμή μονάδος που καθορίζεται από τη ν φθίνουσα συνάρτηση ζήτησης Q=Q(P). Να διαπιστωθεί ότι καθώς η παραγόμενη ποσότητα αυξάνει το έσοδο θα αυξάνει αν η ζήτηση είναι ελαστική.

   (β) Να βρεθεί στη θετική περιοχή μια συνεχής φθίνουσα συνάρτηση y=f(x) η οποία είναι ελαστική όταν x<2 και ανελαστική όταν x>2. (1 μονάδα)

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2008

Α Μέρος

1. (α) Να γίνει το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης f(x) της οποίας η παράγωγος έχει το γράφημα του παράπλευρως σχήματος.



(β) Οι μεταβλητές {x,y} συνδέονται με την εξίσωση: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3$. Να υπολογιστεί η ελαστικότητα του y ως προς x όταν {x=1, y=4}.

(γ) Θεωρούμε την συνάρτηση f(x)=ln(1+x)-ax στο διάστημα $0\leq x\leq 1$.Να διαπιστωθεί ότι είναι κοίλη, και να βρεθούν οι τιμές του **α** για τις οποίες το μέγιστο της βρίσκεται στο δεξιό σύνορο: x=1.

(δ) Να βρεθεί η λύση της διαφορικής εξίσωσης y'=(1+x)y στο θετικό διάστημα με αρχική συνθήκη y(0)=1. **(4 μονάδες)**

2. **(α) Να βρεθεί η μερική παράγωγος fx της συνάρτησης f(x,y)=max{x,y}**

(β) Θεωρούμε την συνάρτηση f(x,y)=x-y^2. Να γίνουν τα γραφήματα των ισοσταθμικών της και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση είναι οιονεί κοίλη ή οιονεί κυρτή.

(γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x,y)=x^2+4y^2-4xy+1$. Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το στάσιμο σημείο της.

(δ) Θεωρούμε το πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης max{2x+y| |x^2+y^2=c με . c>0. Να βρεθεί η λύση γραφικά και αναλυτικά.
(4 μονάδες)

Β Μέρος

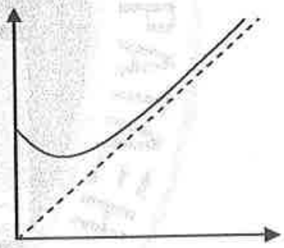
3. **Μια παραγωγική μονάδα χρησιμοποιεί συντελεστή παραγωγής K με μοναδιαίο κόστος v και παράγει ποσότητα Q=2$\sqrt{K}$ ενός προϊόντος το οποίο διατίθεται με μοναδιαία τιμή p. Να βρεθεί το μέγιστο κέρδος Π* ως συνάρτηση των παραμέτρων {v, p} και να διερευνηθούν οι ιδιότητές μονοτονίας, ομογένειας και κυρτότητας αυτής της συνάρτησης. Να ερμηνευτούν αυτές οι ιδιότητες και να σκιαγραφηθούν μια ισοσταθμική της συνάρτησης μέγιστου κέρδους. (1 μονάδα)**

4. **Ένας καταθέτης άνοιξε τραπεζικό λογαριασμό ποσού 100 χιλιάδων ευρώ με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 4% και συνεχή ανατοκισμό. Να βρεθεί ο μέγιστος ετήσιος ρυθμός αναλήψεων που θα του εξασφαλίσει εισόδημα για 10 χρόνια. Για το εκθετικό να χρησιμοποιηθεί η παραβολική προσέγγιση. (1 μονάδα)**

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2010

ΜΕΡΟΣ Α

1. **Η συνάρτηση f(x) έχει το παραπλεύρως γράφημα με πλάγια ασύμπτωτο. Να δοθούν, στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, τα γραφήματα της μέσης τιμής και της οριακής τιμής:**



$\mathrm{Af(x)}=\frac{\mathrm{f(x)}}{x}$ και $\mathrm{Mf(x)}=\mathrm{f'(x)}$ **αντίστοιχα.**

(β). Οι μεταβλητές $\{\mathrm{x,y}\}$ είναι θετικές και συνδέονται με την εξίσωση: $4x^2+y^2=8$. Να διατυπωθεί ότι το $(x=1, y=2)$ είναι σημείο ισοελαστικότητας, και να γίνει το σχετικό γράφημα.

(γ). Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathrm{f(x)=x-ln(1+x)}$, στο διάστημα $0\leq \mathrm{x}\leq 1$. Να διαπιστωθεί ότι είναι κυρτή και να βρεθεί η μέγιστη τιμή της.

(δ). Να γίνει το γράφημα της καμπύλης με εξίσωση: $\mathrm{y(x+1)}=1$ στη θετική περιοχή, και να υπολογιστεί το εμβαδό που περικλείεται από την καμπύλη και τους θετικούς ημιάξονες.

ΜΕΡΟΣ Β

2. **(α).** Η εξίσωση $\mathrm{x^2y+xz-z^2=2}$, ορίζει πλεγμένα το x ως συνάρτηση των $\{\mathrm{y,z}\}$. Να υπολογιστούν η παράγωγος και η ελαστικότητα του X ως προς y, στις τιμές: $\{\mathrm{x=1, y=2, z=1}\}$

(β). Η συνάρτηση $\mathrm{f(x,y)}$ είναι x - φθίνουσα, y - αύξουσα και ορίζει αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης (αντιστάθμισης). Να γίνει το γράφημα μιας ισοσταθμικής της και να διερευνηθεί αν η $\mathrm{f(x,y)}$ είναι οιονεί κοίλη ή οιονεί κυρτή.

(γ). Θεωρούμε την συνάρτηση: $\mathrm{f(x,y)=2ln(xy)-2x-y}$ στη θετική περιοχή. Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί ως ακρότατο το στάσιμο σημείο της.

(δ). Θεωρούμε το πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης: $\min\{\mathrm{4x^2+y^2}\|\mathrm{2x+y=1}\}$. Να βρεθεί η λύση γραφικά και αναλυτικά. Να υπολογιστεί και ο πολλαπλασιαστής Lagrange.

ΜΕΡΟΣ Γ

3. Ένα μονοπώλιο διαθέτει ένα προϊόν σε ετήσια ποσότητα Q με μοναδιαία τιμή P, οπότε το έσοδο είναι: $\mathrm{R=QP}$. αν η ελαστικότητα ζήτησης είναι $\varepsilon=-2$ και το μονοπώλιο αυξάνει την τιμή με ρυθμό 0.5% ετησίως, να εκτιμηθούν:

(α). Ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής του εσόδου.

(β). Το ετήσιο έσοδο μετά την παρέλευση 10 ετών αν το τωρινό έσοδο είναι $\mathrm{R_0}=100$

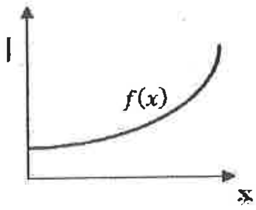
ΜΕΡΟΣ Δ

4. Μια **παραγωγική μονάδα** χρησιμοποιεί συντελεστή παραγωγής Κ με **μοναδιαίο κόστος v και παράγει ποσότητα** Q=ln(1+K) ενός προϊόντος το οποίο **διατίθεται με μοναδιαία** τιμή p. Αν η παραγωγή λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων $\{\mathrm{v,p}\}$ για τις οποίες θα υπάρξει παραγωγή. Σε αυτή την περίπτωση να βρεθεί το μέγιστο κέρδος ως συνάρτηση των παραμέτρων και να διερευνηθούν οι ιδιότητες:

(α). Μονοτονίας, **(β).** Ομογένειας, **(γ).** Κυρτότητας

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2011

1. (α). Η συνάρτηση f(x) έχει το παραπλεύρως γράφημα. Να δοθούν, στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, τα γραφήματα της μέσης τιμής και της οριακής τιμής, αντίστοιχα:



$$Af(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ και } Mf(x) = f'(x)$$

(β). Οι θετικές μεταβλητές $\{x, y\}$ συνδέονται με την εξίσωση: $x^{3/2}y = 1$. Να εκτιμηθεί η ποσοστιαία μεταβολή του x αν το y ελαττωθεί κατά 1% από την αρχική τιμή του.

(γ). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ στο θετικό διάστημα $x \geq 0$. Να διερευνηθεί αν είναι κοίλη ή κυρτή και να βρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της.

(δ). Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $\{f(x) = x, g(x) = 1/x\}$. Να γίνει το γράφημά τους στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, και να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής που περικλείεται από τις καμπύλες τους και τον x – ημιάξονα.

2. (α). Θεωρούμε ότι το σύστημα εξισώσεων: $\{x + y = u,\ x^2 - y = v\}$ ορίζει πλεγμένα τα $\{x, y\}$ ως συναρτήσεις των $\{u, v\}$. Να βρεθεί η μερική παράγωγος του x ως προς u.

(β). Στη θετική περιοχή να σκιαγραφηθεί η ισοσταθμική και η διανυσματική παράγωγος μιας συνάρτησης $f(x, y)$ που είναι x – αύξουσα, y – φθίνουσα, και οιονεί κυρτή.

(γ). Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το στάσιμο σημείο της συνάρτησης:

$$f(x,y) = 4 + 4xy + x^2 + y^2$$

(δ). Θεωρούμε το πρόβλημα: $min\{f = x + 2y \,\|\, g = \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 3\}$. Να βρεθεί γραφικά και αναλυτικά η λύση (x_*, y_*). Να υπολογιστεί και ο πολλαπλασιαστής.

3. Το ετήσιο έσοδο από την πώληση ενός προϊόντος είναι $E = QP$, όπου P είναι η μοναδιαία τιμή του και Q η ποσότητα ζήτησης. Δίνεται ότι η τιμή αυξάνει με ρυθμό 0.5% ετησίως, και ότι η ελαστικότητα ζήτησης είναι $\varepsilon = -3$. Να εκτιμηθούν ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής του εσόδου, καθώς και το ύψος του ετήσιου εσόδου μετά την παρέλευση 4 ετών αν το τωρινό έσοδο είναι $E_0 = 1$

4. Χρησιμοποιώντας εργασία L, μια επιχείρηση έχει παραγωγή $Q = ln(1 + L)$, με κόστος $C = wL$. Η παραγωγή διατίθεται στην αγορά με τιμή μονάδος p. Η επιχείρηση λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος, εφόσον είναι θετικό. Να βρεθούν τα παρακάτω:
(α) Η συνθήκη υπό την οποία θα υπάρξει παραγωγή.
(β) Το κέρδος Π ως συνάρτηση του μοναδιαίου κόστους εργασίας και της μοναδιαίας τιμής: $\{w, p\}$. Να διερευνηθούν οι ιδιότητες μονοτονίας και κυρτότητας αυτής της συνάρτησης.

$x^{\frac{3}{2}}y = 1$ $\quad x = y^{-\frac{2}{3}}$ $\quad \frac{\Delta x}{0{,}01} =$

$x = y^{-\frac{5}{3}}$

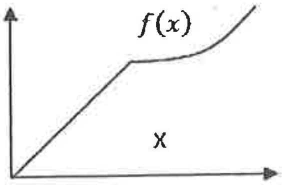
$(x_0+\Delta x)^{\frac{3}{2}}(y_0\Delta y) = 1$ $\quad \frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{2}{3} y^{-\frac{5}{2}}$ $\quad \frac{\%\Delta x}{\%\Delta y} = -\frac{2}{3}$

$(1+\Delta x)^{3/2}(0{,}01) = 1$

$0{,}0333$

Εξετάσεις Ιανουαρίου 2011

ΘΕΜΑ 1^{ο} (4 Μονάδες)



1) Να βρεθούν γραφικά τα σημεία ισοελαστικότητας, αν υπάρχουν, της συνάρτησης που έχει το γράφημα του παραπλεύρως σχήματος.
2) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^2 - \ln(1 + x)$ στο διάστημα $0 \leq x \leq 1$. Να διαπιστωθεί ότι είναι κυρτή και να βρεθεί η μέγιστη τιμή της.
3) Να υπολογιστούν η 1^{η} και 2^{η} παράγωγος στο σημείο $(x = 2, y = 1)$ της συνάρτησης $y = y(x)$ που ορίζεται πλεγμένα από την εξίσωση $4x + y + y^3 = 10$.
4) Να γίνει το γράφημα και να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης $(x + 1)^2 y = 1$ και των θετικών ημιαξόνων.

ΘΕΜΑ 2^{ο} (4 Μονάδες)

1) Να σκιαγραφηθεί η ισοσταθμική μιας συνάρτησης $f(x, y)$ που είναι φθίνουσα και:
   1. Οιονεί κοίλη
   2. Ορίζει αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης
2) Να διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση $f(x, y) = (x - y)/y$ είναι ομογενής και να επαληθευτεί η αντίστοιχη εξίσωση Euler.
3) Να χαρακτηριστεί ως προς το πρόσημό της η τετραγωνική μορφή: $Q = 2x^2 + y^2 - 2xy$, και να δοθεί ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας. Στη συνέχεια να χαρακτηριστεί ως προς το πρόσημό της η περιορισμένη τετραγωνική μορφή: $\tilde{Q} = \{2x^2 + y^2 - 2xy \parallel 2x - y = 0$, και να δοθεί ο αντίστοιχος πλαισιωμένος συμμετρικό πίνακας.
4) Το περιορισμένο στάσιμο τη συνάρτησης $f = x^2 + y^2$ με τον περιορισμό $g = 2x + y =$, είναι $(x = 2, y = 1)$. να χαρακτηριστεί το στάσιμο ως ακρότατο, αναλυτικά και γραφικά στο επίπεδο.

ΘΕΜΑ 3^{ο} (1 Μονάδα)

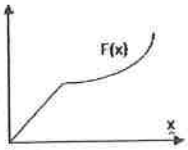
Θεωρούμε παραγωγή με έναν συντελεστή παραγωγής: L, και με συνάρτηση παραγωγής: $Q = 3L^2 - L^3$. Αν η μοναδιαία τιμή του προϊόντος είναι p και το μοναδιαίο κόστος του συντελεστή είναι w, να βρεθεί η βέλτιστη ποσότητα του συντελεστή που μεγιστοποιεί το κέρδος, ως συνάρτηση των $\{p, w\}$, και να διερευνηθεί η ομογένεια της.

ΘΕΜΑ 4^{ο} (1 Μονάδα)

Σε μία οικογένεια το εισόδημα της συζύγου είναι τριπλάσιο από αυτό του συζύγου. Αν το εισόδημα της συζύγου αυξηθεί κατά 2% και το εισόδημα του συζύγου αυξηθεί κατά 3%, να εκτιμηθεί η αύξηση του οικογενειακού εισοδήματος.

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2012

Θέμα 1 (4 Μονάδες)



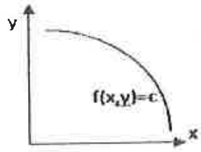
α) Η συνάρτηση f(x) έχει το γράφημα παραπλεύρως. Να δοθούν τα γραφήματα της μέσης τιμής και της οριακής τιμής: $Af(x) = \frac{f(x)}{x}$, $Mf(x) = f'(x)$ στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

β) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^2 - ax$ στο διάστημα: $0 \leq x \leq 1$. Να διαπιστωθεί ότι είναι κυρτή και να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες το μέγιστο της βρίσκεται στο δεξιό σύνορο: $x = 1$

γ) Να γίνει το γράφημα και να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης $(x + 1)y^2 = 1$ και των θετικών ημιαξόνων.

δ) Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση: $2y' = -y/10 + 2$. Να δοθούν τα γραφήματα της σταθερής λύσης καθώς και της λύσης με μηδενική αρχική τιμή: $y(0) + 0$

Θέμα 2 (4 Μονάδες)



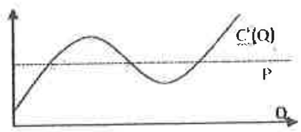
α) Η εξίσωση $\alpha^2\beta + \alpha x - x^2 = 2$ ορίζει πλέγματα το x ως συνάρτηση των $\{\alpha, \beta\}$. Να βρεθούν η παράγωγος και η ελαστικότητα του x ως προς α, στις τιμές: $\{\alpha = 1, \beta = 2, x = 1\}$.

β) Μια συνάρτηση f(x,y) είναι y- φθίνουσα, με ισοσταθμικές όπως στο σχήμα παραπλεύρως. Να προσδιοριστεί η μονοτονία της ως προς x, και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση ορίζει φθίνοντα ή αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης του y από το x.

γ) Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα (ελεύθερα) στάσιμα της συνάρτησης: $f(x, y) = x^2 y - 2x - y$, στη θετική περιοχή: $\{x \geq 0, y \geq 0\}$

δ) Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το (περιορισμένο) στάσιμο της συνάρτησης: $f(x, y) = xy$ με τον περιορισμό: $g(x, y) = 4x + y = 4$ στη θετική περιοχή: $\{x \geq 0, y \geq 0\}$

Θέμα 3 (1 Μονάδα)



Μια παραγωγική μονάδα λειτουργεί με οριακό κόστος $C'(Q)$ και με τιμή διάθεσης μιας μονάδας του προϊόντος σταθερή : P, όπως στο παραπλεύρως σχήμα. Να προσδιοριστεί γραφικά η βέλτιστη ποσότητα παραγωγής για το μέγιστο κέρδος και να διερευνηθεί αν η μονάδα είναι βιώσιμη.

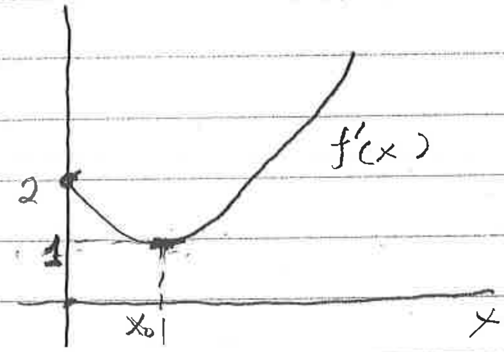
Θέμα 4 (1 Μονάδα)

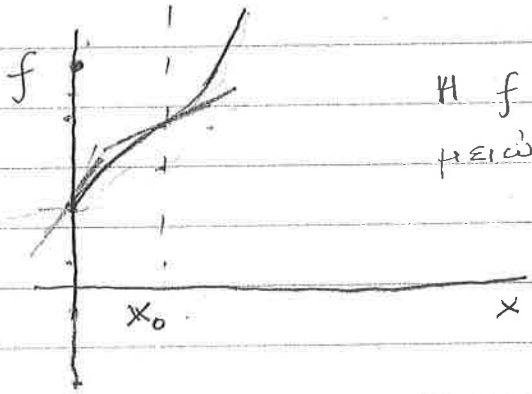
Θεωρούμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του κόστους παραγωγής για δοσμένη ποσότητα παραγωγής: $min\{C = vK + wL \| Q = K^\rho + L^\rho = q$ με $0<\rho<1$ όπου v, w είναι οι μοναδιαίες τιμές των συντελεστών παραγωγής, κεφαλαίου και εργασίας: K, L αντίστοιχα.

1. Να γίνουν τα γραφήματα των καμπυλών ισοπαραγωγής.
2. Να διαπιστωθεί ότι στις βέλτιστες ποσότητες των συντελεστών παραγωγής, ο λόγος συμμετοχής: K/L εξαρτάται μόνο από το λόγο των μοναδιαίων τιμών: v/w, και ότι η αντίστοιχη εξάρτηση είναι φθίνουσα ελαστική.

Σεπτέμβριος 2006

1 (α)



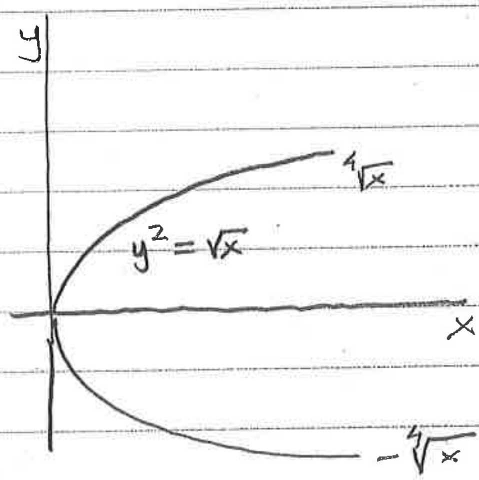


Η f αρχίζει με κλίση 2 η οποία συνεχώς μειώνεται μέχρι το σημείο x_0 οπότε η κλίση αρχίζει να αυξάνεται.
Στο $[0, x_0]$ η f' μειώνεται άρα $f''<0$ και η f κοίλη, ενώ στο $[x_0, +$ η f' αυξάνεται οπότε η $f''>0$ και η f είναι κυρτή. Το x_0 σημείο καμπής.

(β) $y^2-\sqrt{x}=0$, άρα $y=\pm\sqrt[4]{x}$

η f' είναι $(x^{\frac{1}{4}})' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}>0$

και $f''(x) = -\frac{3}{16}x^{-\frac{7}{4}}<0$, f κοίλη



Η ελαστικότητα $\varepsilon = E_x y = \frac{xy'}{y}$
(βιβλίο σελίδα 70)

$$2y\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow 2yy' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow y' = \frac{1}{4y\sqrt{x}}$$

$$\varepsilon = \frac{x\frac{1}{4y\sqrt{x}}}{y} = \frac{\sqrt{x}}{4y^2} = \frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} = \frac{1}{4}$$

Άρα η συνάρτηση έχει όλα τα σημεία της με $\varepsilon = \frac{xy'}{y} = \frac{1}{4} <$
για $\varepsilon < 1$ όλα τα σημεία είναι ανελαστικά.

(γ) Η γραμμική προσέγγιση στο σημείο ξ της f είναι
$f(x) - f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi)$ (σελίδα 243)

Έχουμε ότι $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$ $f''(x) = 2\frac{1}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^3}$

$f(0)=1$

Άρα $f(x) = f(0) + f'(0)x = 1 - \frac{1}{1^2}x = 1-x$

Η παραβολική προσέγγιση στο σημείο ξ της f είναι
$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-\xi)^2$

Άρα $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$

$= 1 - x + \frac{1}{2}2x^2 = 1 - x + x^2$

(δ) $y' = -xy \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -x \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = -\int x\,dx \Rightarrow \ln y = -\frac{1}{2}x^2 + c$

$\Rightarrow y = e^{-\frac{x^2}{2}+c} = e^{-\frac{x^2}{2}}c_1$ αλλά $y(0)=1$ οπότε $1 = c_1$

Δηλαδή $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

2. (α) $x^2y + xz - z^2 = 2$ το z είναι συνάρτηση των x, y

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y,z) = x^2y + xz - z^2$

Η $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z}$ (σελίδα 149) $f_x = 2xy + z$
$f_z = -2z + x$

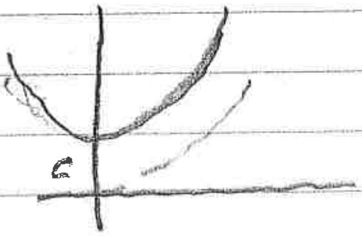
Άρα $z_x = -\frac{2xy+z}{-2z+x} = \frac{z+2xy}{2z-x}$ $z_x\Big|_{(1,2,1)} = \frac{1+2\cdot2\cdot1}{2-1}$

$\varepsilon = -\frac{xz_x}{z} = -\frac{x}{z}\left(\frac{z+2xy}{2z-x}\right)$ άρα $\varepsilon\Big|_{(1,2,1)} = -\frac{1}{1}\frac{5}{1} = -5$

Άρα το σημείο $(1,2,1)$ είναι ελαστικό. Γιατί $|E_x| > 1$

(β) Εφ' όσον η f είναι φθίνουσα ως προς x η $\frac{\partial f}{\partial x}$ θα είναι αρνητική και αντιστοίχως η $\frac{\partial f}{\partial y}$ θα είναι θετική

Η συνάρτηση θα είναι παρόμοιας μορφής με την $f(x,y) = y - x^2$. Μια ισοσταθμική της (contours είναι η $y = c + x^2$, που είναι η τομή της $f(x,y) = y - x^2$ με ένα οριζόντιο επίπεδ



(γ) Υπολογίζουμε την παράγωγο $\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ και μετά τον Εσσιανό πίνακα $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ ο οποίος παίζει τον ρόλο της δεύτερης παραγώγου.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 - 2\alpha x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4 - 2y$ $\quad \nabla f = 0 \Rightarrow \begin{matrix} 1 - \alpha x = 0 \\ 4 - 2y = 0 \end{matrix}$

Με $\alpha \neq 0$ έχουμε $\begin{matrix} x = \frac{1}{\alpha} \\ y = 2 \end{matrix}$. Η $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2\alpha$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$.

$$H = \begin{pmatrix} -2\alpha & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$H \leq 0$ αν $f_{xx} \leq 0$, $f_{yy} \leq 0$, $\Delta = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$;

Η αρνητικά ημιορισμένη αν $-2\alpha \leq 0$, $-2 \leq 0$ και $4\alpha \geq 0$ άρα για $\alpha \geq 0$

Συνεπώς για $\alpha > 0$ το σημείο $\begin{matrix} x = \frac{1}{\alpha} \\ y = 2 \end{matrix}$ είναι μέγιστο

και για $\alpha < 0$ έχουμε $-2\alpha > 0$, $-2 < 0$, $4\alpha < 0$ οπότε ο πίνακ είναι αόριστος. Για $\alpha = 0$ δεν υπάρχει στάσιμο.

(δ) $f = \ln x + \ln y$ $\quad g(x,y) = x+2y = c$

Η Lagrangian θα είναι $f+\lambda(c-g)$ δηλαδή

$L = \ln x + \ln y + \lambda(c-x-2y)$. Βελτιστοποιούμε

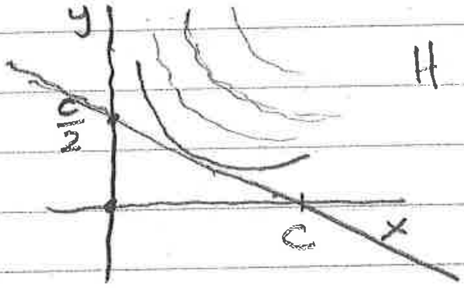
χωρίς περιορισμούς. $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{x} - \lambda = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{y} - 2\lambda = 0$,

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = c-x-2y=0$. Άρα $\frac{1}{x}=\lambda$, $\frac{1}{y} = 2\lambda$ από όπου

$x = +\frac{1}{\lambda}$, $y=+\frac{1}{2\lambda}$ και $c-x-2y=0 \Rightarrow c-\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}=0$ $\quad c-\frac{2}{\lambda}=0$

$c=\frac{2}{\lambda}$, $\lambda=\frac{2}{c}$ άρα $x=\frac{c}{2}$, $y=\frac{c}{4}$, $\lambda=\frac{2}{c}$

Για να κάνουμε την γραφική παράσταση της f θεωρούμε την ισοσταθμική $\ln x+\ln y = b =$ σταθ. Άρα $\ln xy = b$, $xy = e^b =$ σταθ άρα έχουμε μια οικογένεια υπερβολών.



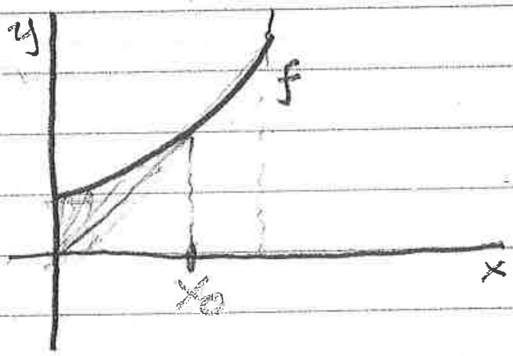
Η λύση είναι η υπερβολή η εφαπτόμενη στη ευθεία $x+2y=c$

Η ερμηνεία του πολλαπλασιαστή Lagrange είναι ότι ισούται με την παράγωγο της ακρότατης τιμής f^* ως προς την τιμή του περιορισμού c. $f^* = \ln\frac{c}{2} + \ln\frac{c}{4} =$

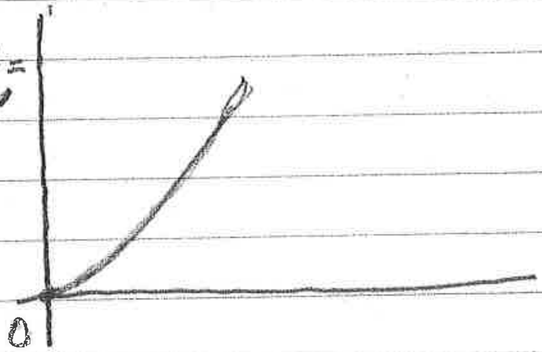
$2\ln c - \ln 2 - \ln 4 = 2\ln c - 3\ln 2$ $\quad f^{*\prime}(c) = 2\frac{1}{c} = \lambda$

Ιανουάριος 2007

1.(α)

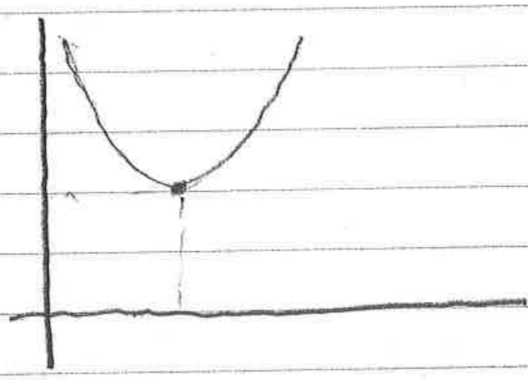


$Mf = f'$



Η συνάρτηση f έχει $f'=0$ στο μηδέν και μετά f' αύξουσα π.χ. $f = x^2+1$ έχει $f'=2x$

$Af = \frac{f(x)}{x}$



Η $εφφ = \frac{f(x)}{x} = \frac{y}{x}$ αρχίζει από πολύ μεγάλες τιμές, μειώνεται συνεχώς μέχρι μ τιμή c και μετά αυξάνεται συνεχώς

(β) Αναζητούμε μια ομογενή συνάρτηση της μορφής $y = \alpha x^{\kappa}$ γιατί οι ομογενείς έχουν σταθερή ελαστικ/τα

$y' = \kappa \alpha x^{\kappa-1}$ και η ελαστικότητα $\varepsilon = \frac{x y'}{y} = \frac{x \kappa \alpha x^{\kappa-1}}{\alpha x^{\kappa}}$

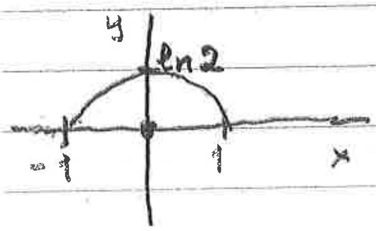
$= \kappa$ άρα $\varepsilon = -\frac{1}{3}$ δίνει $\kappa = -\frac{1}{3}$. Όμως $y(8)=1$ δηλαδ

$\alpha 8^{\kappa} = 1$ άρα $\alpha 8^{-\frac{1}{3}} = 1$, $\alpha \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = 1$, $\alpha = 2$

Η συνάρτηση είναι η $y = 2x^{-\frac{1}{3}}$

(γ) $f(x)=\ln(2-x^2)$ $\quad f'=\frac{1}{2-x^2}(-2x)=\frac{2x}{x^2-2}$

$$f''=\frac{(2x)'(x^2-2)-2x\cdot 2x}{(x^2-2)^2}=\frac{2x^2-4-4x^2}{\Pi\alpha\rho^2}=\frac{-2x^2-4}{(+)}<0$$



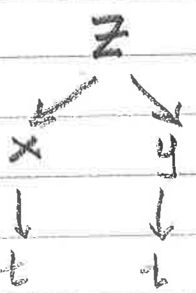
$|x|\leq 1 \Rightarrow x^2-2<0$, $f'<0$ $x<0$ φθίνουσα

Η συνάρτηση δεν έχει ελάχιστο στο στάσιμο μηδεν γιατί $f''<0$ οπότε αυτό είναι μέγι
Το ελάχιστο βρίσκεται στα σημεία -1 και $+1$ στα άκρα τ
διαστήματος. Η τιμή του είναι $f(X_{min})=0$.

(δ) $y'=(x-1)y \Rightarrow \frac{dy}{y}=(x-1)dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=(x-1)dx+c$

$\Rightarrow \ln y=\frac{1}{2}x^2-x+c \Rightarrow y=e^{\frac{x^2}{2}-x}\cdot b$ για $y(1)=1$
όπου $b=e^c$
έχουμε $b\,e^{\frac{1}{2}-1}=1$, $b\,e^{-\frac{1}{2}}=1 \Rightarrow b=\sqrt{e}$ και $e^c=e^{\frac{1}{2}}$ άρα
$y=e^{\frac{x^2}{2}-x}\sqrt{e}$

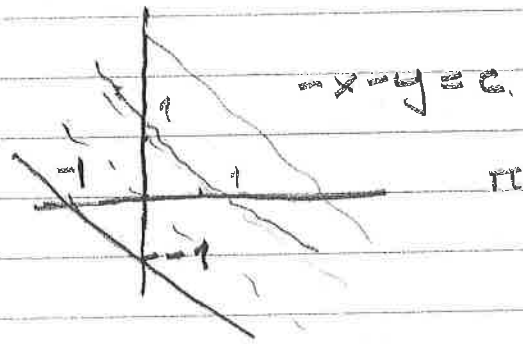
2. (α) $z=z(x,y)=z(x(t),y(t))$ (σελίδα 139)



$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Η παράγωγος $\frac{dz}{dt}$ καλείται ολική παράγωγ (β) f x-φθίνουσα, y-φθίνουσα και οιονεί κυρτή

$\frac{\partial f}{\partial x}<0$, $\frac{\partial f}{\partial y}<0$, μιά γραμμική συνάρτηση είναι οιονεί κυρτή. Αρκεί λοιπόν για $f=\alpha x+\beta y$ να έχω $\frac{\partial f}{\partial x}=\alpha<0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\beta<0$ Έστω $f=-x-y$



Ο πλαισιωμένος Εσσιανός πίνακας $H=\begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{bmatrix}$ έχει $|H|=0$

άρα είναι θετικά ημιορισμένος γιατί η ορίζουσά του είναι μηδενική.

(γ) $f(x,y)=1+x^2+xy$ Στάσιμο όταν $\nabla f=0$

$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y$ $\frac{\partial f}{\partial y}=x$ $\begin{matrix} 2x+y=0 \\ x=0 \end{matrix}$ άρα $\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=1$ $f_{xx}>0$ $f_{yy}=0$ $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=$

$=-1<0$, άρα ο πίνακας Εσσιανός είναι αόριστος στο (0

και έχουμε σαγματικό σημείο.

(δ) $f(x,y) = \sqrt{x}\cdot y \qquad g(x,y) = x+8y = 12$

Η Lagrangian του προβλήματος είναι:

$L = \sqrt{x}\cdot y + \lambda(12-x-8y) \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}y - \lambda = 0$

$\frac{\partial L}{\partial y} = \sqrt{x} - 8\lambda = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 12 - x - 8y = 0$

Συνεπώς $\frac{y}{2\sqrt{x}} = \lambda$, $\sqrt{x} = 8\lambda \qquad \frac{y}{16\lambda} = \lambda$, $x = 64\lambda^2$ και

$y = 16\lambda^2 \quad x = 64\lambda^2$ άρα $12 - 64\lambda^2 - 8\cdot 16\lambda^2 = 0$, $12 - 192\lambda^2 = 0$

$\lambda^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{4} \qquad x = 4 \quad y = 1$

Η ερμηνεία του πολλαπλασιαστή Lagrange είναι ότ αυτός είναι ίσος με την παράγωγο της ακρότατης τιμής f^* ως προς την τιμή του περιορισμού c

$x + 8y = c$

$L = \sqrt{x}y + \lambda(c - x - 8y) \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}y - \lambda = 0 \, , \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \sqrt{x} - 8\lambda$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = c - x - 8y = 0 \qquad c - 64\lambda^2 - 128\lambda^2 = 0 \qquad -192\lambda^2 = -c \qquad \lambda^2 = \frac{c}{1}$

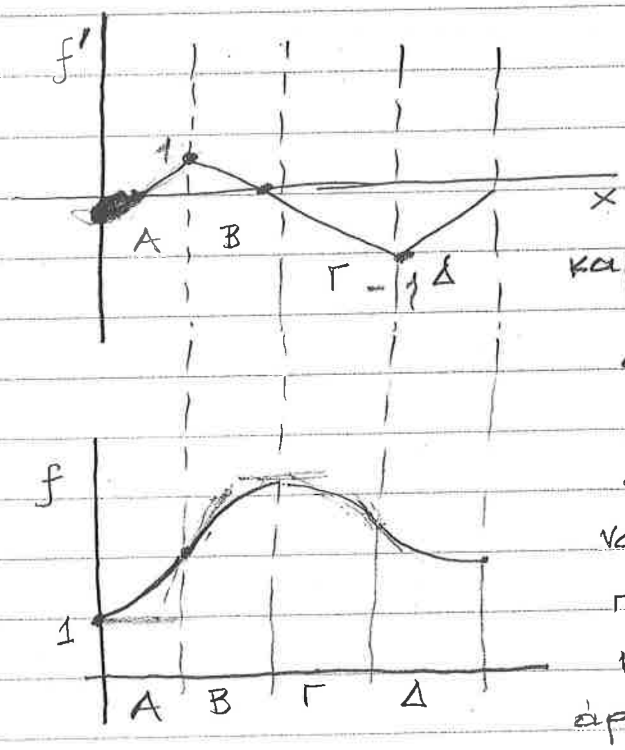
$\lambda = \frac{\sqrt{c}}{4\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{c}}{4\cdot 2\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{c}}{8\sqrt{3}} \qquad x = \frac{64c}{192} = \frac{4\cdot 16c}{16\cdot 12} =$

$y = 16\lambda^2 = \frac{16c}{192} = \frac{c}{12}$ άρα $f^* = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{3}}\frac{c}{12} = \frac{c\sqrt{c}}{12\sqrt{3}}$

$f^{*\prime}(c) = \frac{(c^{\frac{3}{2}})'}{12\sqrt{3}} = \frac{3}{24\sqrt{3}}\sqrt{c} = \frac{1}{8\sqrt{3}}\sqrt{c}$

Σεπτέμβριος 2007

1 (α)



Στο A $f'\uparrow$ άρα $f''>0$, f κυρτή. f' φθάνει σε μια θετική τιμή λ και μετά μειώνεται. Σημείο καμπής. Δηλαδή στο B έχω f' φθίνουσα άρα $f''<0$, f κοίλη. Στο πέρας του B η $f'=0$ άρα η f έχει μέγιστο και συνεχίζει να είναι κοίλη και στο Γ μέχρι να πάρει η f' μια αρνητική τιμή $-\lambda$ και τότε αρχίζει η f' να αυξάνει: άρα έχω σημείο καμπής. Στο Δ η f' αυξάνεται άρα $f''>0$, f κυρτή.

(β) Η ελαστικότητα του x ως προς y ορίζεται σαν $\varepsilon = \dfrac{y\frac{dx}{dy}}{x}$

οπότε αφού $x = \dfrac{8-3y}{2}$, $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{3}{2}$. Άρα $\varepsilon = \dfrac{-\frac{3y}{2}}{\frac{8-3y}{2}} = \dfrac{-3y}{8-3y}$

$\varepsilon = \dfrac{3y}{3y-8}$ η ε στο σημείο $y=2$ είναι $\varepsilon = \dfrac{6}{6-8} = -2$

$|\varepsilon| = 2 > 1$. Σημείο ελαστικότητας.

(γ) $f(x)=\ln(x+1)-\alpha x$ $\quad f'(x)=\frac{1}{x+1}-\alpha$, $f''=-\frac{1}{(x+1)^2}<0$

Άρα η f κοίλη. $f(0)=0$ $\quad f'(x)<0$ αν $\frac{1}{x+1}-\alpha<0$

$\frac{1}{x+1}<\alpha \Leftrightarrow x+1>\frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow x>\frac{1}{\alpha}-1=\frac{1-\alpha}{\alpha}$. Για $\alpha=1$ έχουμε

$f'(0)=0$ $\quad f''(0)=-1<0$ άρα το $x=0$ μέγιστο με τιμή 0.

$f'(x)=\frac{1}{x+1}-1<0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1}<1 \Leftrightarrow x+1>1 \Leftrightarrow x>0$

Δηλαδή για $x>0$ έχουμε $f'<0$, f φθίνουσα άρα το $x=0$ είναι μέγιστο με τιμή 0.

Για $\alpha<0$, $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\alpha>0$ άρα f αύξουσα στο $[0,+\infty)$
Το $x=0$ δεν μπορεί να είναι μέγιστο.

Για $\alpha=0$ $\quad f'(x)=\frac{1}{x+1}>0$ άρα f αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Το $x=0$ δεν μπορεί να είναι μέγιστο.

Για $0<\alpha<1$ $\quad f'(x)=\frac{1}{x+1}-\alpha>0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1}>\alpha \Leftrightarrow x+1<\frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow x<\frac{1}{\alpha}$

άρα για $x<\frac{1-\alpha}{\alpha}$ η f' είναι θετική άρα f αύξουσα και

το $x=0$ δεν είναι μέγιστο.

Για $\alpha>1$ $\quad f'(x)=\frac{1}{x+1}-\alpha<0$ όταν $\frac{1}{x+1}<\alpha \Leftrightarrow x+1>\frac{1}{\alpha}$

$\Leftrightarrow x>\frac{1}{\alpha}-1 \Leftrightarrow x>\frac{1-\alpha}{\alpha}$ το οποίο ισχύει. Άρα f φθίνουσα

στο $[0,+\infty)$ και συνεπώς $x=0$ μέγιστο της f.

Δηλαδή για $\alpha\geq 1$ έχουμε max στο $x=0$.

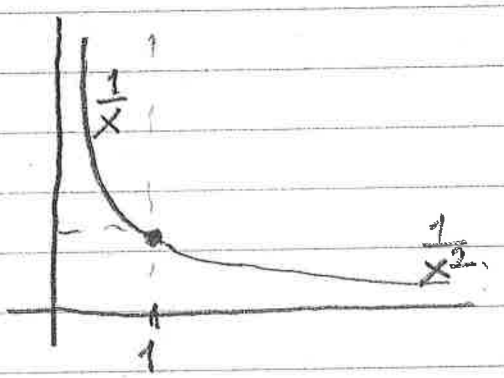
(δ) $f(x)=\min\left\{\frac{1}{x},\frac{1}{x^2}\right\}$ για $x>0$

Αν $0<x<1$ το $x(x-1)<0$ άρα $x^2-x<0$, $x^2<x$ δηλαδή

$\frac{1}{x^2}>\frac{1}{x}$ άρα $\min\left\{\frac{1}{x},\frac{1}{x^2}\right\}=\frac{1}{x}$

Αν $1\le x<+\infty$ $x(x-1)\ge 0$ άρα $x^2\ge x$ και $\frac{1}{x^2}\le\frac{1}{x}$

δηλαδή $\min\left\{\frac{1}{x^2},\frac{1}{x}\right\}=\frac{1}{x^2}$

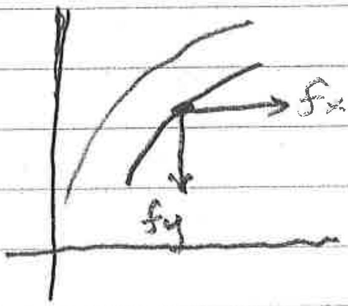


$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\int_1^{+\infty}x^{-2}dx=\lim_{T\to+\infty}\int_1^T x^{-2}dx=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{-2+1}x^{-1}\Big|_1^T=$$

$$=\lim_{T\to+\infty}-\frac{1}{x}\Big|_1^T=\lim_{T\to+\infty}\left(-\frac{1}{T}+1\right)=0+1=1$$

2. (α) Ίδιο θέμα με του Σεπτεμβρίου 2006

(β) Σύμφωνα με το γράφημα η f είναι x-αύξουσα και



y-φθίνουσα γιατί $f_x > 0$ και $f_y < 0$

Δηλαδή έχει μορφή παρόμοια με της $x - y^2 = c$, $y > 0$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 > 0$ $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y < 0$ και $-\frac{f_x}{f_y} = -\frac{\text{θετικό}}{\text{αρνητικό}} = \text{θετικό}$

άρα έχουμε θετικό ρυθμό υποκατάστασης.

(γ) $Q = x^2 + 4y^2 - 4xy$. Είναι της μορφής $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$

με συμμετρικό πίνακα τον $S = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}$ και

$\Delta = |S| = \alpha\gamma - \beta^2$. Το $\alpha = 1 > 0$ $\gamma = 4 > 0$ και $\alpha\gamma - \beta^2 = 4 - 4 = 0$

Άρα (σελίδα 198) $\alpha > 0, \gamma > 0$ και $\Delta \geq 0$ συνεπώς η

τετραγωνική μορφή είναι θετικά ημιορισμένη.

Θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι $Q = (x - 2y)^2$

άρα $Q \geq 0$. Το "=" για $x = 2y$ (ευθεία) (δ) $\min\{x^2+y^2 \mid 2x+y=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$

Θεωρούμε την Lagrangian του προβλήματος

που είναι $L = x^2+y^2+\lambda(1-2x-y)$ με $\frac{\partial L}{\partial x}=2x-2\lambda$

$\frac{\partial L}{\partial y}=2y-\lambda$ $\quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=(1-2x-y)$ $\quad \frac{\partial L}{\partial x}=0, \frac{\partial L}{\partial y}=0 \Rightarrow$

$x-\lambda=0,\ 2y-\lambda=0,\ 2x+y=1 \Rightarrow x=\lambda,\ y=\frac{\lambda}{2},\ 2\lambda+\frac{\lambda}{2}=1$

$\Rightarrow \frac{5\lambda}{2}=1 \Rightarrow \lambda=\frac{2}{5}$ $\qquad x=\frac{2}{5}\ \ y=\frac{1}{5}$

Γραφικά, έχουμε ότι η οικογένεια των περιφερειών $x^2+y^2=c$ σε άλλα σημεία τέμνει την ευθεία $2x+y=1$ σε άλλα δεν τέμ και σε ένα σημείο εφάπτεται. Στο σημείο αυτό η εξίσωση $x^2+(1-2x)^2=c$ πρέπει να έχει δύο ίσες ρίζες άρα $\Delta=0$

$x^2+4x^2-4x+1-c=0 \qquad 5x^2-4x+1-c=0 \qquad 16-4\cdot5\cdot(1-c)=0$

$16-20+20c=0 \Rightarrow -4+20c=0 \Rightarrow 5c=1,\ c=\frac{1}{5}$

για $x=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ και $y=\frac{1}{5}$ έχουμε ότι

η περιφέρεια $x^2+y^2=\frac{1}{5}$ εφάπτεται στην ευθεία $2x+y=1$

Για $c>\frac{1}{5}$ $\ 5c>1\ \ 20c>4 \Leftrightarrow -4+20c>0$ και η $\Delta>0$ έχουμε δύο πραγματικές ρίζες και δύο σημεία τομής με $x^2+y^2>\frac{1}{5}$, ενώ για $c<\frac{1}{5}$ $\Delta<0$ και δεν υπάρχουν σημεία τομής της $x^2+y^2=c$ με την ευθεία $2x+y=1$

Ιανουάριος 2008

1. (β) Αναζητούμε ομογενή συνάρτηση της μορφής $y=f(x)=Ax^{\alpha}$ γιατί γνωρίζουμε ότι έχουν σταθερή ελαστικότητα ε.

Πράγματι, $y'=A\alpha x^{\alpha-1}$ και $\varepsilon=\dfrac{xy'}{y}=\dfrac{xA\alpha x^{\alpha-1}}{Ax^{\alpha}}=\alpha=\dfrac{1}{2}$

Όμως έχουμε την αρχική συνθήκη $y(1)=3$
$\Rightarrow A\cdot 1=3$ άρα $A=3$. Άρα μιά συνάρτηση με $\varepsilon=\frac{1}{2}$ και $y(1)=3$ είναι η $y=3x^{\frac{1}{2}}$

(γ) $f(x)=\sqrt{x}-\alpha x$, $0\le x\le 1$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\alpha$ άρα $f'=0 \Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\alpha \Rightarrow \sqrt{x}=\dfrac{1}{2\alpha} \Rightarrow x=\dfrac{1}{4\alpha^2}$ στάσιμο

$f''(x)=\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}<0$ άρα f κοίλη

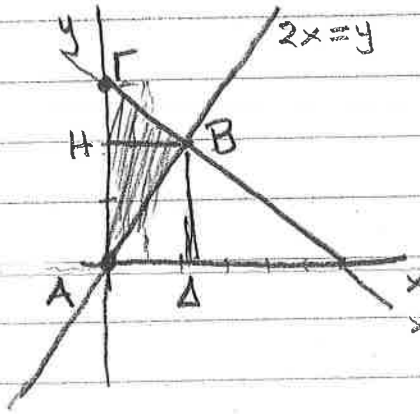
- Αν το $\alpha<0$ τότε $f'>0$ f αύξουσα στο $[0,1]$ και μέγιστο στο $x=1$.

- Αν το $\alpha=0$ η f είναι επίσης αύξουσα στο $[0,1]$ με μέγιστο στο $x=1$
- Αν το $\alpha>0$ τότε $f'=0$ για $x=\dfrac{1}{4\alpha^2}$ και $f'>0$ για $x<\dfrac{1}{4\alpha^2}$

(δηλαδή για $\sqrt{x}<\frac{1}{2\alpha} \Leftrightarrow 2\sqrt{x}<\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{2\sqrt{x}}>\alpha$) και $f'<0$ για $x>\frac{1}{4\alpha}$
οπότε
το $x=\dfrac{1}{4\alpha^2}$ είναι μέγιστο διάφορο του $x=1$ αν $\dfrac{1}{4\alpha^2}<1$

Αν $\dfrac{1}{4\alpha^2}\ge 1$ τότε $f'>0$ για $x<\dfrac{1}{4\alpha^2}$ άρα στο $x_0=1$ λαμβάνει την μέγιστη τιμή.

(δ) $2x-y=0$, $x+y=6$



Η τομή των δύο ευθειών $x+2x=6$, $3x=6$

$x=2 \quad y=4$.

Το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι

$\frac{1}{2} BH \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6$

Αν ονομάσουμε την συνάρτηση $y=2x=f(x)$ και την συνάρτηση $y=6-x=g(x)$. Τότε

$$(AB\Gamma) = (A\Delta B\Gamma) - (AB\Delta) = \int_0^2 g(x)dx - \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (6-x)dx$$

$$- \int_0^2 2x\,dx = 6\cdot 2 - \frac{1}{2}x^2\Big|_0^2 - 2\,\frac{1}{2}2^2 = 12-2-4 = 6$$

2 (α) $xy^2=s$, $2x+y=t$ Οι δύο εξισώσεις ορίζουν πλεγμένα τα x,y. Κάνουμε απαλοιφή της y και παίρνουμε $x(t-2x)^2=s \Rightarrow x(t^2-4tx+4x^2)=s$

$\Rightarrow xt^2-4tx^2+4x^3-s=0$

Ορίζω σαν $f(x,t,s)=xt^2-4tx^2+4x^3-s$

Σύμφωνα με τον τύπο της σελίδας 149 (κάτω)

$$\frac{\partial x}{\partial t}=-\frac{f_t}{f_x}=-\frac{2tx-4x^2}{t^2-8tx+12x^2}=\frac{4x^2-2tx}{t^2-8tx+12x^2}$$

(β) Ίδιο με Σεπτέμβριο 2006

(γ) $f(x,y)=1-6x+x^2+y^2-4xy$

Το στάσιμο είναι στο σημείο όπου $\nabla f(x,y)=0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-6+2x-4y=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y-4x=0 \Leftrightarrow 2y=4x \Leftrightarrow y=2x$$

και $-6+2x-4\cdot 2x=0 \Rightarrow -6-6x=0$ $x=-1$

$y=-2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4$$

Ο Εσσιανός πίνακας είναι

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{άρα} \quad |H| = 4-(-4)(-4) = -12<0$$

Άρα ο πίνακας H δεν είναι θετικά ή αρνητικά (ημι)ορισμένος, έχουμε λοιπόν ότι το στάσιμο είναι σαγματικό σημείο.

Η ισοσταθμική που διέρχεται από το $x=-1$ $y=-2$ είναι η $1-6x+x^2+y^2-4xy = 1-6(-1)+1+(-2)^2-4(-1)(-2)$
$= 1+6+1+4-8 = 4$

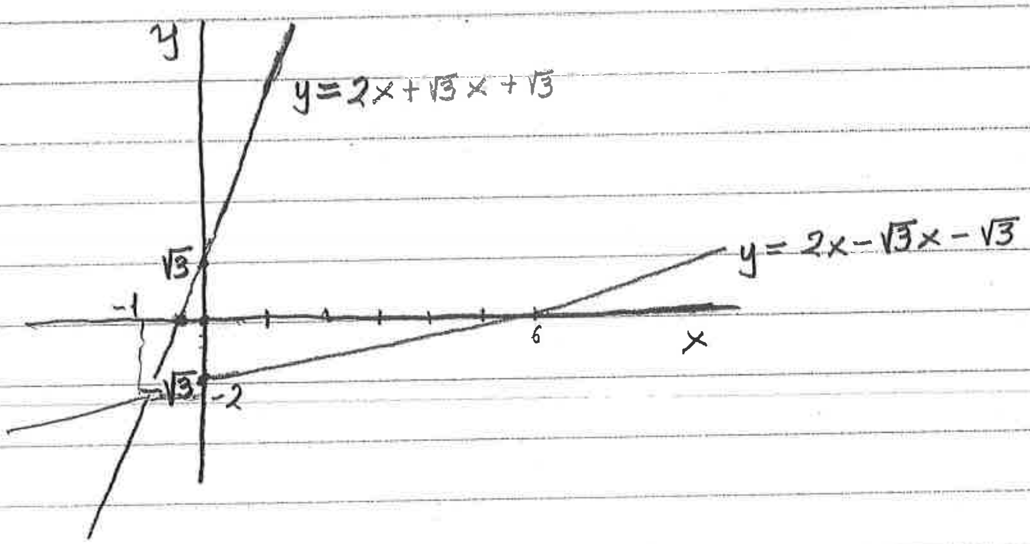
Δηλαδή $x^2+y^2-4xy-6x-3=0$ έχουμε μια τετραγωνική μορφή

Λύνοντας την εξίσωση ως προς y
έχουμε $y^2-4xy+x^2-6x-3=0$ $\quad \Delta = 16x^2-4(x^2-6x-3) = 12x^2+24x+12$
$= 12(x+1)^2$

Άρα $y = \dfrac{4x \pm \sqrt{12}(x+1)}{2} \Rightarrow y = 2x \pm \sqrt{3}(x+1)$

Άρα έχουμε ζεύγος τεμνόμενων ευθειών $y = 2x+\sqrt{3}x+\sqrt{3}$
$y = (2-\sqrt{3})x-\sqrt{3}$

Το σημείο τομής τους $(2+\sqrt{3})x+\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})x-\sqrt{3} \Rightarrow$
$2x+\sqrt{3}x-2x+\sqrt{3}x = -2\sqrt{3} \Rightarrow 2\sqrt{3}x = -2\sqrt{3} \Rightarrow x=-1$
και αμέσως προκύπτει $y=-2$ που είναι το στάσιμο.



Αν $(y-2x)^2-3(x+1)^2=0$ έχουμε ζεύγος τεμνόμενων ευθειών.

Αν $(y-2x)^2-3(x+1)^2=c^2$ έχουμε οικογένεια υπερβολών,

που έχει ασύμπτωτες τις παραπάνω ευθείες.

2(δ) $\max\{2\ln x + \ln y \mid 2x + y = 6\}$.

Θεωρούμε την Lagrangian

$$L = \underbrace{2\ln x + \ln y}_{f} + \lambda(6 - 2x - y)$$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 2\frac{1}{x} - 2\lambda = 0$ $\quad \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{y} - \lambda = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 6 - 2x - y = 0$

$\frac{1}{x} = \lambda$, $\frac{1}{y} = \lambda \Rightarrow x = \frac{1}{\lambda}$, $y = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow 6 - 2\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = 0$

$6 - \frac{3}{\lambda} = 0 \Rightarrow 6 = \frac{3}{\lambda} \Rightarrow 6\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

Άρα $x = 2$ $\quad y = 2$ $\quad$ και $f(2,2) = 2\ln 2 + \ln 2 = 3\ln 2$

Ο πλαισιωμένος πίνακας Εσσιανός είναι

$$H_L = \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} & g_x \\ L_{yx} & L_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{bmatrix}$$

με $L_{xx} = -2\frac{1}{x^2}$ $\quad L_{yy} = -y^{-2}$

$L_{xy} = L_{yx} = 0$

$g_x = 2 \quad g_y = 1$

$$|H_L| = -L_{xx}g_y^2 - L_{yy}g_x^2 + 2L_{xy}g_xg_y = -\left(-\frac{2}{x^2}\right)\cdot 1 - \left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot 2^2$$

$= \frac{2}{x^2} + \frac{4}{y^2} > 0$ για κάθε $x > 0$ $y > 0$

Άρα έχουμε μέγιστο στο $x = 2$, $y = 2$.

$\max\{x\sqrt{y} \mid 2x+y=6\}$

Θεωρούμε την Lagrangian

$$L = f(x,y) + \lambda(6-2x-y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \sqrt{y} - 2\lambda \;,\; \frac{\partial L}{\partial y} = x\frac{1}{2\sqrt{y}} - \lambda \;,\; \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 6-2x-y$$

$$\Rightarrow \sqrt{y} = 2\lambda \;,\; \frac{x}{2\sqrt{y}} = \lambda \;,\; 6-2x-y=0 \Rightarrow \frac{x}{4\lambda} = \lambda \Rightarrow x = 4\lambda^2$$

και $x = 2\lambda\sqrt{y} \Rightarrow 4\lambda^2 = 2\lambda\sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{y} = 2\lambda \Rightarrow y = 4\lambda^2$

$$\Rightarrow 6 - 2\cdot 4\lambda^2 - 4\lambda^2 = 0 \Rightarrow 6 - 12\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{6}{12} \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα $x = 4\frac{\sqrt{2}^2}{2^2} = 2 \quad y = 2 \qquad$ και $f(2,2) = 2\sqrt{2}$

Θεωρούμε τον πλαισιωμένο Εσσιανό πίνακα H_L

με $|H_L| = -L_{xx}g_y^2 + 2L_{xy}g_xg_y - L_{yy}g_x^2$

$L_{xx}=0 \quad L_{yy} = \frac{x}{2}(y^{-\frac{1}{2}})' = \frac{x}{2}(-\frac{1}{2})y^{-\frac{3}{2}} = -\frac{x}{4}y^{-\frac{3}{2}}$

$L_{xy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} = L_{yx} \;,\; g_x = 2 \;,\; g_y = 1$

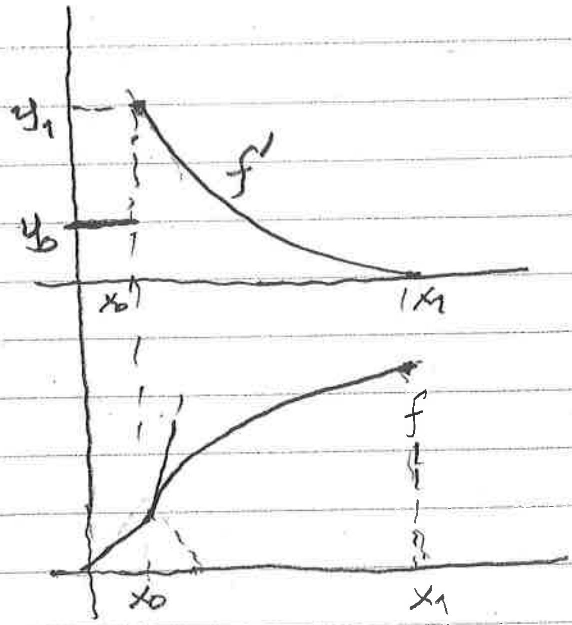
$|H_L| = 2\frac{1}{2\sqrt{y}}2\cdot 1 - (-\frac{x}{4}y^{-\frac{3}{2}})4 = \frac{2}{\sqrt{y}} + xy^{-\frac{3}{2}} > 0$

για κάθε $x,y>0$ Άρα το στάσιμο είναι μέγιστο

στο σημείο $x=2, y=2$.

Σεπτέμβριος 2008

1(α)



Στο $[0,x_0]$ η f' είναι σταθερή άρα η συνάρτηση είναι γραμμική. Στο x_0 η f' γίνεται από y_0, y_1 και μετά μειώνεται ομαλά. Η f είναι γραμμική στο $[0,x_0]$ και εφόσον $f' \downarrow$ στο $[x_0,x_1]$ $f''<0$ άρα f κοίλη στο $[x_0,x_1]$. Στο x_1 έχουμε $f'(x_1)=0$ άρα η ευθεία που δίνει την κλίση είναι οριζόντια.

(β) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3$ Η ελαστικότητα ε δίνεται από τον τύπο $\varepsilon = \dfrac{x y'}{y}$. Πρέπει να υπολογίσουμε την y'.

Έχουμε $f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$. $f(x,y)=3 \Rightarrow \dfrac{df(x,y)}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dx}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{-1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}y' \Rightarrow -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = y' \Rightarrow y' = -y^{1/2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\varepsilon = \frac{x(-y^{1/2}x^{-\frac{1}{2}})}{y} = \frac{x^{\frac{1}{2}}(-y^{1/2})}{y} = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

ε στο σημείο $(x=1, y=4)$ είναι $\dfrac{-1}{\sqrt{4}} = \dfrac{-1}{2}$ άρα $|\varepsilon| = \dfrac{1}{2}$

(γ) Ίδια με την άσκηση στο Σεπτέμβριος 2007 (δ) $y' = (1+x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = (1+x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int (1+x)dx$

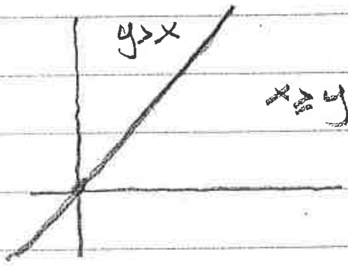
$\Rightarrow \ln y = x + \frac{1}{2}x^2 + c \Rightarrow y(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}} e^{c} \Rightarrow y = e^{x+\frac{x^2}{2}} A$

$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = e^{0} A \Rightarrow A = 1$ άρα $y = e^{x+\frac{x^2}{2}}$

2 (α) $f(x,y) = \max\{x,y\}$ αν $x \geq y$ $f(x,y) = x$

αν $x < y$ $f(x,y) = y$

Άρα



$\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ αν $x \geq y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ αν $x < y$

(β) $f(x,y) = x - y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

Θεωρούμε τον πλαισιωμένο Εσσιανό πίνακα (σελ. 271-72)

$$H_f \doteq \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2y \\ 1 & 0 & 0 \\ -2y & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{με } |H_f| = -f_{xx}f_y^2 + 2f_{xy}f_xf_y - f_{yy}f_x^2$$
$$= -(-2)\cdot 1^2 = 2 > 0$$

Άρα η f είναι γνήσια οιονεί κοίλη.

(γ) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 1$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \doteq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ 8y - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 2y = x \end{cases}$ έχουμε αόριστο σύστημα δηλαδή όλη η

ευθεία $y = \frac{x}{2}$ είναι στάσιμα.

Θεωρούμε τον Εσσιανό πίνακα $\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$

$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 2\cdot 8 - (-4)^2 = 0 \geq 0 \quad f_{xx} \geq 0, f_{yy} \geq 0$

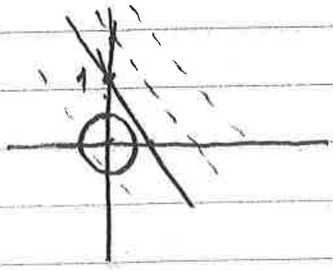
Άρα ο Εσσιανός είναι θετικά ημιορισμένος οπότε έχουμε ελάχιστο.

Μπορούμε να δούμε ότι το μέγιστο είναι το $+\infty$ και το ελάχιστο στα σημεία της ευθείας $y=\frac{x}{2}$ γιατί

$f(x,y)=(x-2y)^2+1$ άρα $\text{Min}f=1$

(δ) $\text{Max}\{2x+y \mid x^2+y^2=c\}$

Ο περιορισμός περιγράφει τον κύκλο ακτίνας $\sqrt{c}$ με κέντρο $(0,0)$.



Οι ισοσταθμικές της f είναι οι ευθείες $2x+y=\alpha$ για τις διάφορες τιμές του α.
Το μέγιστο είναι σε κάποιο από τα σημεία που η $2x+y=\alpha$ εφάπτεται στον κύκλο.

$y=\alpha-2x \Rightarrow x^2+(\alpha-2x)^2=c \Leftrightarrow x^2+4x^2-4\alpha x+\alpha^2=c.$

$5x^2-4\alpha x+\alpha^2-c=0$ $\quad \Delta=(4\alpha)^2-4\cdot 5\cdot(\alpha^2-c)=16\alpha^2-20\alpha^2+20c$
$=-4\alpha^2+20c$
$=4(-\alpha^2+5c)$

για $\Delta<0$ δεν έχουμε σημεία τομής

για $\Delta>0$ έχουμε δύο σημεία τομής και δεν έχουμε ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο

για $\Delta=0$ έχουμε εφαπτόμενη ευθεία. Άρα θα πρέπει $5c-\alpha^2=0$
$\alpha^2=5c$, $\alpha=\pm\sqrt{5c}$ με μέγιστο το $+\sqrt{5c}$.

Άρα $2x+y=\sqrt{5c}$, $x^2+y^2=c$ $\quad (\sqrt{5c}-2x)^2+x^2=c \Rightarrow$
$\Rightarrow 5c+4x^2-4x\sqrt{5c}+x^2=c \Rightarrow 4c+5x^2-4x\sqrt{5c}=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (2\sqrt{c}-\sqrt{5}x)^2=0$

Άρα για $x=\frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5c}}{5}$, $y=\frac{\sqrt{5c}}{5}$ έχουμε

$2x+y=\sqrt{5c}$ που δίνει μέγιστο.

Αναλυτικά τώρα, θεωρούμε την Lagrangian

$$L = 2x + y + \lambda(c - x^2 - y^2)$$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ δίνουν $2 - 2\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda x = 1$

$1 - 2\lambda y = 0 \Rightarrow \lambda y = \frac{1}{2}$

$x^2 + y^2 = c$

$\Rightarrow x = \frac{1}{\lambda}$, $y = \frac{1}{2\lambda}$ $\quad \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = c \Rightarrow \frac{5}{4\lambda^2} = c \Rightarrow \lambda^2 = \frac{5}{4c} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{c}}$

$x = \frac{1}{\lambda} = \pm \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5c}}{5}$ $\quad y = \frac{1}{2\lambda} = \frac{\sqrt{5c}}{5}$ ή

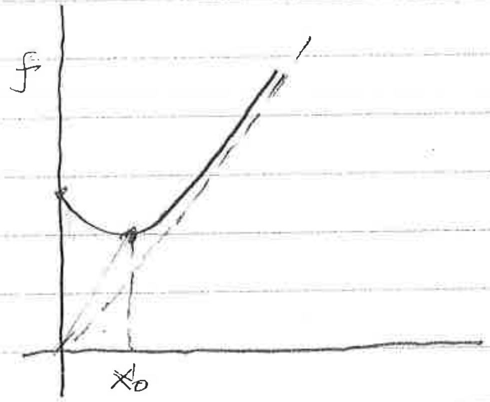
$x = \frac{-2\sqrt{5c}}{5}$ $\quad y = -\frac{\sqrt{5c}}{5}$ άρα $f = 2x + y = \begin{cases} \sqrt{5c} \\ ή \\ -\sqrt{5c} \end{cases}$

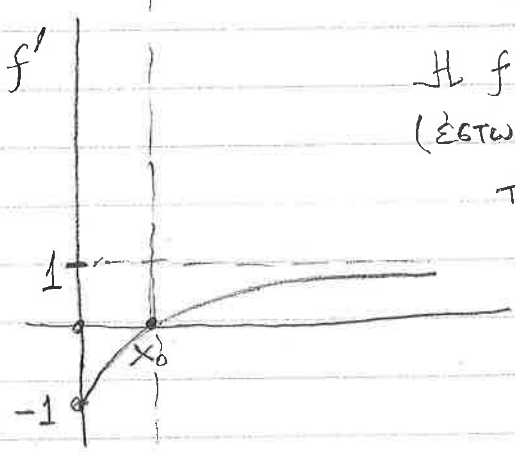
άρα το $x = \frac{2\sqrt{5c}}{5}$ $y = \frac{\sqrt{5c}}{5}$ είναι το μέγιστο με τιμή $\sqrt{5c}$, γιατί ο πλαισιωμένος Εσσιανός πίνακας με ορίζουσα $-g_y^2 L_{xx} + 2L_{xy} g_x g_y - g_x^2 L_{yy} = -(2y)^2(-2\lambda) + 2\cdot 0 - (2x)^2(-2\lambda) = 4x^2 \cdot 2\lambda + 4y^2 \cdot 2\lambda = 8\lambda(x^2 + y^2)$ για $\lambda > 0$ είναι αρνητικά ημιορισμένος άρα έχουμε μέγιστο

με $\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{c}}$, $x = \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{5}}$, $y = \frac{\sqrt{5c}}{5}$.

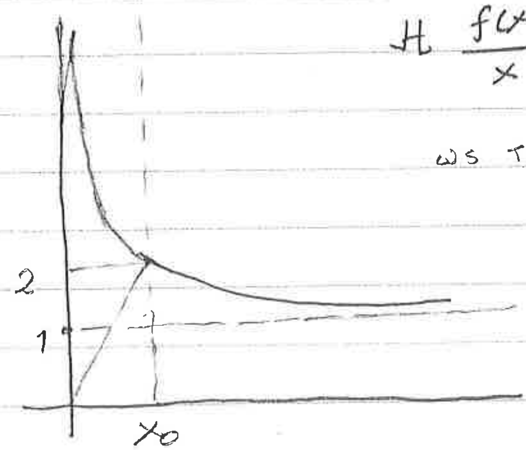
Σεπτέμβριος 2010

1. (α)





Η f' αρχίζει από μία αρνητική τιμή (έστω -1) συνεχίζει να αυξάνεται μέχρι την τιμή 0 στο x_0 και αυξάνει ασυμπτωτικά ως το $+1$.



Η $\frac{f(x)}{x}$ μειώνεται από την τιμή $εφφ=+\infty$ ως την τιμή $\frac{f(x_0)}{x_0} > 1$ (έστω 2) και μειώνεται ασυμπτωτικά ως την τιμή $+1$.

(β) $4x^2+y^2=8 \Leftrightarrow y^2=8-4x^2 \Rightarrow y=\sqrt{8-4x^2}$ γιατι $y\geq 0,\ x\geq 0$

Άρα $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{8-4x^2}}(8-4x^2)'=\dfrac{1}{2\sqrt{8-4x^2}}(-8x)=\dfrac{-4x}{\sqrt{8-4x^2}}$

Η ελαστικότητα $\varepsilon=\dfrac{xy'}{y}=\dfrac{x\left(-\frac{4x}{\sqrt{8-4x^2}}\right)}{\sqrt{8-4x^2}}=\dfrac{-4x^2}{8-4x^2}$

Τα σημεία ισοελαστικότητας είναι τα σημεία για τα οποία
$|\varepsilon|=1$ δηλαδή $\dfrac{4x^2}{8-4x^2}=1 \Leftrightarrow 4x^2=8-4x^2 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=1$ (γιατι $x\geq 0$)

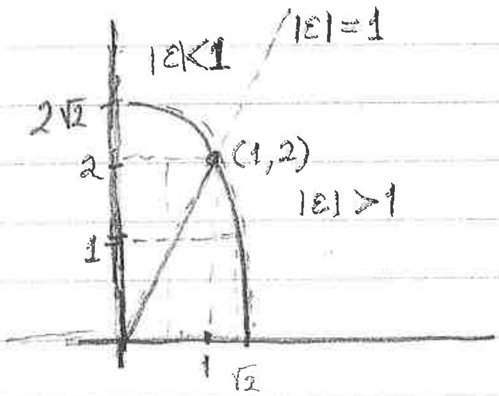
για $x=1$ έχουμε $y=\sqrt{8-4}=\sqrt{4}=2$

Μπορούμε εναλλακτικά να χρησιμοποιήσουμε την σχέση $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}(8)=0$ που μας δίνει

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-8x}{2y}=\dfrac{-4x}{y}$ άρα $\varepsilon=\dfrac{x\left(\frac{-4x}{y}\right)}{y}=\dfrac{-4x^2}{y^2}$

$|\varepsilon|=1$ τα x,y τέτοια ώστε $\dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{1}{4}$, το $x=1,\ y=2$

είναι ένα από αυτά.



(γ) $f(x) = x - \ln(1+x) \qquad 0 \leq x \leq 1$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \cdot 1 = \frac{x}{1+x}$$

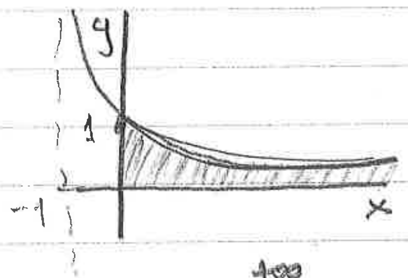
$$f''(x) = \frac{x'(1+x) - x(1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

άρα η f κυρτή.

$f' > 0 \Rightarrow f \uparrow$ στο $[0,1]$ άρα το μέγιστο στο 1.

Δηλαδή $\max f(x)$ στο $[0,1]$ $= 1 - \ln 2$

(δ) $y(x+1) = 1$ άρα $y = \frac{1}{x+1}$



$y' = -\frac{1}{(x+1)^2} \qquad y'' = \frac{2}{(x+1)^3} > 0$

άρα η y είναι κυρτή

$$E = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1}\,dx = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T \frac{1}{x+1}\,d(x+1) = \lim_{T\to\infty} \ln(T+1) - \ln(0+1)$$

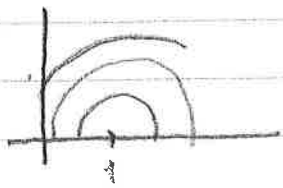
$$= \lim_{T\to\infty} \ln(T+1) = +\infty.$$

2. (α) Ίδια με την Σεπτ. 2006 2(α)

(β) f x-φθίνουσα $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} < 0$, f y-αύξουσα $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$

Άρα $\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} > 0$ και επειδή ορίζει αύξοντα ρυθμό

υποκατάστασης (αντιστάθμιση) η y'' έχει το ίδιο πρόσημο με την $y'(x)$ άρα $y''(x) > 0$ η συνάρτηση f είναι οιονεί κυρτή.



Όπως η $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$

(γ) $f(x,y) = 2\ln(xy) - 2x - y = 2\ln x + 2\ln y - 2x - y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{x} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 = 0 \quad x = 1$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{y} - 1 = 0 \Rightarrow y = 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2}{x^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2}{y^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

Ο Εσσιανός πίνακας $\begin{bmatrix} -\frac{2}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{y^2} \end{bmatrix}$ είναι αρνητικά ημιορισμένος δηλαδή $f_{xx} \le 0, f_{yy} \le 0, f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \ge 0$

Άρα το $x=1, y=2$ δίνει τοπικό μέγιστο

(δ) $\min\{4x^2+y^2 \mid 2x+y=1\}$

$$f(x,y)=4x^2+y^2 \qquad g(x,y)=2x+y$$

Ο περιορισμός $2x+y=1$ δίνει μια ευθεία. Οι ισοσταθμικές $4x^2+y^2=c$ δίνουν μιά οικογένεια ελλείψεων. Η f λαμβάνει την ελάχιστη τιμή στο σημείο επαφής που η f εφάπτεται στην ευθεία.

Δηλαδή $4x^2+(1-2x)^2=c$ πρέπει να έχει μιά διπλή ρίζα, άρα $4x^2+4x^2-4x+1=c$ πρέπει να έχει διακρίνουσα $\Delta=0$. $8x^2-4x+1-c=0$ έχει

$$\Delta=16-4\cdot 8(1-c)=-16+32c=0 \Rightarrow c=\frac{1}{2}$$

Άρα το min λαμβάνεται στην τιμή $x=\frac{4\pm\sqrt{\Delta}}{16}=\frac{1}{4}$

άρα για $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{2}$ έχουμε ότι η έλλειψη

$4x^2+y^2=\frac{1}{2}$ εφάπτεται στην ευθεία $2x+y=1$.

Η Lagrangian είναι $L=f+\lambda(c-g)=4x^2+y^2+\lambda(1-2x-y)$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=8x-2\lambda=0, \quad \frac{\partial L}{\partial y}=2y-\lambda=0, \quad 1-2x-y=0$$

$$x=\frac{\lambda}{4}, \quad y=\frac{\lambda}{2}, \quad 1-2\frac{\lambda}{4}-\frac{\lambda}{2}=0 \Rightarrow 1-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=1$$

$\Rightarrow x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{2}$. Ο πλαισιωμένος Εσσιανός πίνακας

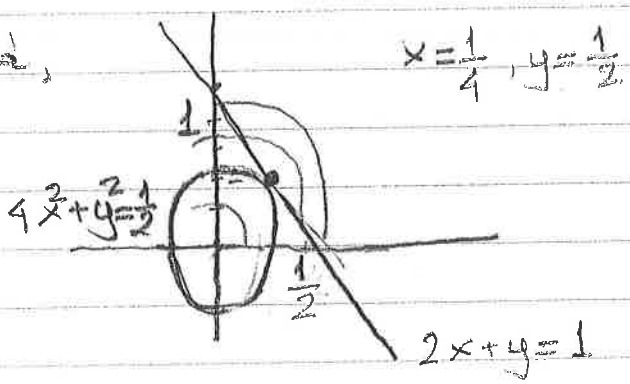
είναι $\begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{xy} & L_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ και

$$-L_{xx}g_y^2+2L_{xy}g_xg_y-L_{yy}g_x^2=-8\cdot 1^2+2\cdot 0-2\cdot 2^2=-16<0$$

Ο πίνακας θετικά ημιορισμένος, άρα το $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{2}$

δίνει ελάχιστο.

Γραφικά,



Σεπτέμβριος 2011

1 (α) Όπως στο ερώτημα Ιανουαρίου 2007.

(β) $x^{\frac{3}{2}}y=1 \Rightarrow y=x^{-\frac{3}{2}}$, $y'=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$

άρα η ελαστικότητα είναι $\frac{xy'}{y}=\frac{x\left(-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}\right)}{x^{-3/2}}=-\frac{3}{2}$

άρα η ποσοστιαία μεταβολή του x βάσει του $\frac{\%\Delta y}{\%\Delta x}=-\frac{3}{2}$

είναι $\frac{1\%}{\%\Delta x}=-\frac{3}{2} \Rightarrow \Delta x=-\frac{2}{3} \Rightarrow \Delta x=-0,66666$

άρα αν το y μειωθεί κατα 1% το x θα αυξηθεί κατα 0,6666%.

(γ) $f(x)=x^3+x^2+x+1$ $\quad f'(x)=3x^2+2x+1$

$f''(x)=6x+2>0$ για $x\geq 0$ άρα η f κυρτή στο $[0,+\infty)$

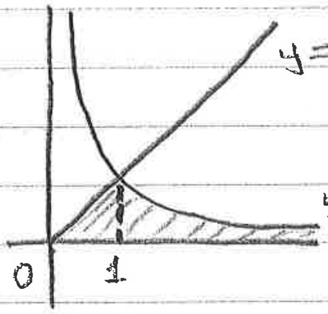
$f'=0 \Leftrightarrow 3x^2+2x+1=0$. $\Delta=4-4\cdot 3\cdot 1=-8<0$ άρα

δεν υπάρχουν πραγματικές ρίζες. Άρα $f'>0 \ \forall x\geq 0$

άρα $f(0)=1$ ελάχιστη τιμή και

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ μέγιστο στο $+\infty$.

(δ) $f(x)=x$, $g(x)=\frac{1}{x}$



$$E=\int_0^1 x\,dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$$

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,dx=\lim_{T\to\infty}\int_1^T\frac{dx}{x}=\lim_{T\to\infty}(\ln T-0)$$

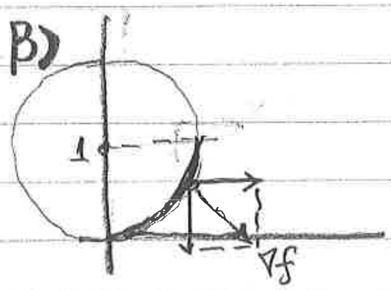
$$=\lim_{T\to\infty}\ln T=+\infty \quad \text{άρα } E=+\infty$$

2. (α) $x+y=u$, $x^2-y=v$ $\Rightarrow x^2-(u-x)=v \Rightarrow x^2+x-u=v$

$$\frac{\partial}{\partial u}(x^2+x-u)=\frac{\partial}{\partial u}v=0 \Rightarrow \frac{\partial x^2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial u}-1=0$$

$$\Rightarrow 2x\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial u}=1 \Rightarrow (2x+1)\frac{\partial x}{\partial u}=1 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{2x+1}$$

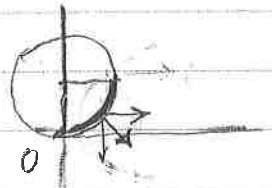
(β)



x αύξουσα $\frac{\partial f}{\partial x}>0$

y φθίνουσα $\frac{\partial f}{\partial y}<0$

Π.χ. $f=x^2+(y-1)^2$ x αυξ y φθιν για $y<1$



$$f_{xx}f_y^2-2f_{xy}f_yf_x+f_{yy}f_x^2=2[2(y-1)]^2+2(2x)^2\geq 0$$

$\Rightarrow f$ οιονεί κυρτή

(γ) $f(x,y) = 4 + 4xy + x^2 + y^2$

$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow 4y + 2x = 0, \quad 4x + 2y = 0$

$y = -\frac{x}{2} \quad 4x + 2(-\frac{x}{2}) = 0 \Rightarrow 3x = 0 \quad x = 0 \quad y = 0$

$\Rightarrow$ Το σημείο $(0,0)$ ειναι στάσιμο.

Ο Εσσιανός πίνακας της f είναι $\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad |H| = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 2 \cdot 2 - 4^2 = -12 < 0$

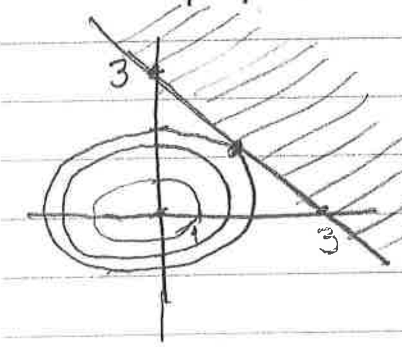
Άρα δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένος

οπότε έχουμε σαγματικό σημείο.

(δ) $\mathrm{Min}\{f = x + 2y \,\|\, g = \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 3\}$

Ισοδύναμα $F = x^2 + 2y^2 = c^2 \quad G = x + y \geq 3$

Ο περιορισμος ικανοποιειται στο ημιεπίπεδο $x + y \geq 3$



Αν μια ισοσταθμική $x^2 + 2y^2$ τέμνει το ημιεπίπεδο δεν εχομε ακρότατο.
Όταν μια ισοσταθμική εφάπτεται στην ευθεία $x + y = 3$ έχουμε ακρότατο το οποίο είναι ελάχιστο γιατί η $F > F$(σημείου εφαπτο

Πράγματι

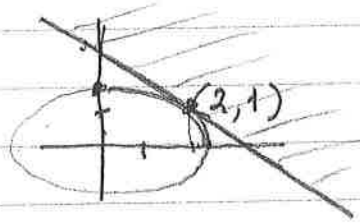
$F_1 = x^2 + 2(3-x)^2 - c^2 = 3x^2 - 12x + 18 - c^2 = 0$ πρέπει να έχει δυο ίσες ρίζες.

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 144 - 4\cdot 3(18 - c^2) = 0 \Leftrightarrow 12 - (18 - c^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -6 + c^2 = 0 \quad c = \sqrt{6}$$

$$3x^2 - 12x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \quad x = 2$$

άρα για $x^2 + 2y^2 = 6$ η έλλειψη εφάπτεται στην ευθεία $x + y = 3$ στο σημείο $x = 2, y = 1$



$F = x^2 + 2y^2 \quad F(2,2) = 12 > 6$

Αναλυτική λύση τώρα: $L = F + \lambda h = x^2 + 2y^2 + \lambda(-x - y + 3)$

όπου $F(x,y) = x^2 + 2y^2 \qquad h(x,y) = -x - y + 3 \leq 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 4y - \lambda = 0 \qquad -x - y + 3 = 0$$

$$x = \frac{\lambda}{2}, \quad y = \frac{\lambda}{4}, \quad -\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4} + 3 = 0 \Rightarrow \frac{-3\lambda}{4} + 3 = 0$$

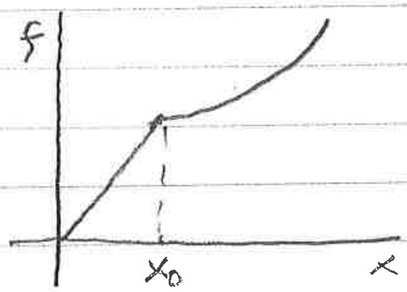
$\Rightarrow \lambda = 4 \geq 0$ άρα έχουμε ακρότατο με λύση Kuhn-Tuck που είναι η $x = 2, y = 1$ όπως είδαμε και στην γραφική επίλυση του προβλήματος.

Άρα στο αρχικό πρόβλημα $\sqrt{x} = 2, \sqrt{y} = 1 \Rightarrow x = 4, y = 1$

$$\min = f(4,1) = 4 + 2 = 6$$

Ιανουάριος 2011

Θέμα 1ο: 1)



Η συνάρτηση είναι γραμμική της μορφής αx στο $[0, x_0]$

$y' = \alpha \qquad \varepsilon = \frac{x y'}{y} = \frac{x\alpha}{\alpha x} = 1$ άρα στο $[0, x_0]$ όλα τα σημεία είναι ισοελαστικά. Στο $[x_0, +\infty)$ μόνο σε ειδικές περιπτώσεις έχουμε ισοελαστικά σημεία.

2) $f(x) = x^2 - \ln(1+x)$

$f' = 2x - \frac{1}{1+x} \qquad f'' = 2 + \frac{1}{(1+x)^2} > 0$ άρα η f κυρτή

$f' = 0 \qquad 2x = \frac{1}{1+x} \Rightarrow 2x + 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 1 \qquad \Delta = 4 - 4 \cdot 2(-1) = 12$

$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad f' < 0$ για $\frac{-1-\sqrt{3}}{2} < x < -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

άρα στο $[0,1]$ είναι f φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right]$ και αύξουσα στο $\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}, 1\right]$. Άρα το ακρότατο μέγιστο ή στο 0 ή στο 1. $f(0) = 0$, $f(1) = 1 - \ln 2 > 0$ άρα το μέγιστο στο $x = 1 \qquad f(1) = 1 - \ln 2$.

3) $4x + y + y^3 = 10$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$$

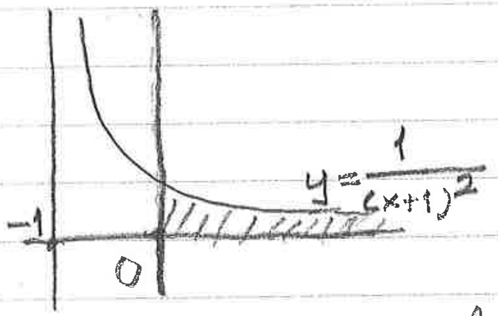
$$4 + (1+3y^2)\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-4}{1+3y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4\,\frac{d(1+3y^2)^{-1}}{d(1+3y^2)}\,\frac{d(1+3y^2)}{dy}\,\frac{dy}{dx} = -4\left(-\frac{1}{(1+3y^2)^2}\right)6y\cdot y'$$

$$= \frac{4}{(1+3y^2)^2}\,6y\,\frac{-4}{1+3y^2} = \frac{-96y}{(1+3y^2)^3}$$

Άρα $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2,y=1} = \frac{-4}{4} = -1$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-96}{64} = \frac{-16\cdot 6}{16\cdot 4} = -\frac{3}{2}$

4)



$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^2}dx = \int_1^{+\infty}\frac{dz}{z^2}, \quad \text{με } z = x+1$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_1^T z^{-2}dz = \lim_{T\to+\infty}\left.\frac{-1}{z}\right|_1^T = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{-1}{T}+1\right) =$$

$$= 0 + 1 = 1.$$

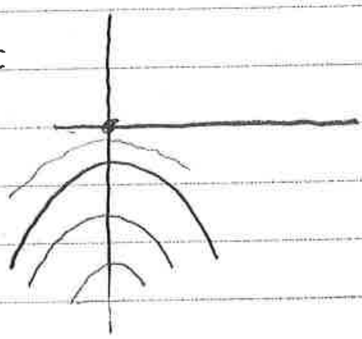
Θέμα 2ο. 1) Μιά συνάρτηση f είναι φθίνουσα όταν είναι x-φθίνουσα και y-φθίνουσα δηλ. $\frac{\partial f}{\partial x}<0, \frac{\partial f}{\partial y}<0$

Είναι οιονεί κοίλη όταν $f_{xx}f_y^2-2f_{xy}f_xf_y+f_{yy}f_x^2\leq 0$

και ορίζει αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης όταν $y'(x), y''(x)$ έχουν ίδιο πρόσημο

Μια τέτοια συνάρτηση είναι π.χ. η $f(x,y)=-y-x^2$

με ισοσταθμικές $-y-x^2=c$ $\quad y=-x^2-c$



2) $f(x,y)=\frac{x-y}{y}$ άρα $f(tx,ty)=\frac{tx-ty}{ty}=\frac{x-y}{y}=t^0\,\frac{x-y}{y}$

άρα η f είναι ομογενής μηδενικού βαθμού.

Η εξίσωση Euler είναι $xf_x+yf_y=0\cdot f=0$

Πράγματι $f_x=\frac{1}{y}$ $\quad f_y=\frac{\frac{\partial(x-y)}{\partial y}y-(x-y)\frac{\partial y}{\partial y}}{y^2}=\frac{(-1)y-(x-y)}{y^2}$

$=\frac{-y-x+y}{y^2}=-\frac{x}{y^2}$

$$\frac{1}{y}x+y\left(-\frac{x}{y^2}\right)=\frac{x}{y}-\frac{x}{y}=0$$

3) $Q = 2x^2 + y^2 - 2xy$, $\alpha = 2, \beta = -1, \gamma = 1$

(σελίδα 194)

$\Delta = \alpha\gamma - \beta^2 = 2 - (-1)^2 = 1 > 0$

$\Rightarrow$ $Q > 0$ σε όλα τα μη μηδενικά σημεία $(x,y) \neq (0,0)$

άρα η Q είναι θετικά ορισμένη.

Ο πλαισιωμένος συμμετρικός πίνακας για

την $Q = 2x^2 + y^2 - 2xy$ $\alpha = 2$ $\gamma = 1$ $\beta = -1$

με $2x - y = 0$ $p = 2, q = -1$

είναι
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

με ορίζουσα $-\alpha q^2 - \gamma p^2 + 2\beta p q$

$\Delta = -2 \cdot 1 - 1 \cdot 4 + 2(-1) \cdot 2(-1)$

$= -2 - 4 + 4 = -2 < 0$

Η περιορισμένη τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμέν

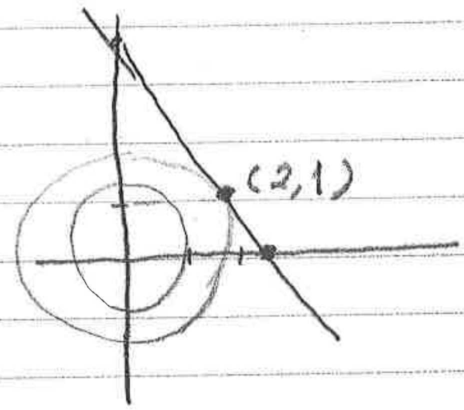
4) $f = x^2 + y^2 \qquad g(x,y) = 2x + y = 5$

Ο περιορισμός δίνει ως αποδεκτά σημεία τα σημεία της ευθείας $2x+y=5$. Το μέγιστο της f είναι
$max\{x^2+(5-2x)^2\} = +\infty$ για $x \to +\infty$
Άρα το στάσιμο είναι ελάχιστο και είναι το σημείο επαφής της ισοσταθμικής $x^2+y^2=c^2$ με την ευθεία.

Άρα η $x^2+(5-2x)^2=c^2$ πρέπει να έχει δύο ίσες ρίζες δηλαδή $\Delta=0$. $x^2+25-20x+4x^2=c^2 \Rightarrow 5x^2-20x+25-c^2=0$

$\Delta = 20^2-4\cdot5(25-c^2)=0 \quad 400-500+20c^2=0 \Rightarrow 20c^2=100$
$\Rightarrow c^2=5$

Η $x^2+y^2=5$ εφάπτεται στην ευθεία $2x+y=5$ στο $x=2, y=1$



Αναλυτικά τώρα η Lagrangian είναι $L=f+\lambda(c-g(x,y))$

$L = x^2+y^2+\lambda(5-2x-y)$

$\frac{\partial L}{\partial x}=2x-2\lambda=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial y}=2y-\lambda=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=5-2x-y=0$

$x=\lambda,\ y=\frac{\lambda}{2} \quad 5-2\lambda-\frac{\lambda}{2}=0 \quad 5-\frac{5\lambda}{2}=0 \quad \lambda=2$ άρα

$x=2,\ y=1$ και ο πλαισιωμένος Εσσιανός

είναι $H_\eta = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{xy} & L_{yy} \end{bmatrix}$ με ορίζουσα

$\Delta = -L_{xx} g_y^2 - L_{yy} g_x^2 + 2 L_{xy} g_x g_y$ (σελ 228)

$L_x = 2x - 2\lambda \quad L_{xx} = 2 \quad L_{xy} = 0$

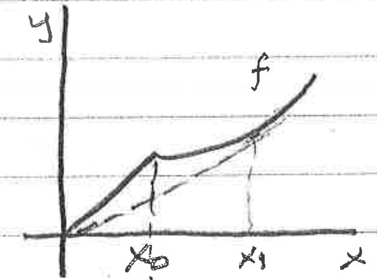
$L_y = 2y - \lambda \quad L_{yy} = 2 \quad , g_x = 2 \quad g_y = 1$

$\Delta = -2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 2^2 = -2 - 8 = -10 < 0$ άρα ο H_η είναι

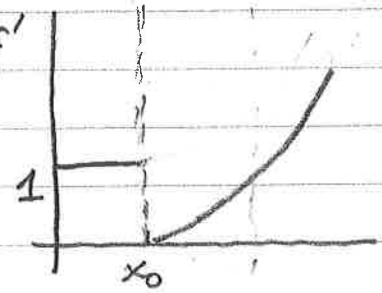
θετικά οριομένος και συνεπώς έχουμε ελάχιστο. //

Σεπτέμβριος 2012

1. (α)



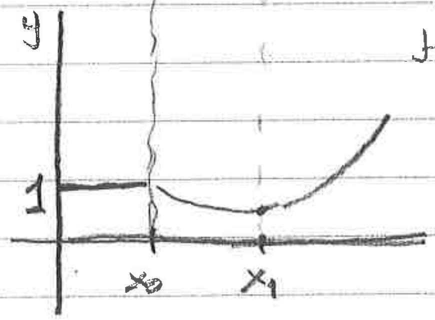
$Mf = f'$



f' σταθερή στο $[0, x_0]$ γιατί η f είναι γραμμική.

Στο x_0 η f'(κλίση) γίνεται από $f'=1$, $f'=0$ οπότε η f' έχει ασυνέχει

Στο $(x_0, +\infty)$ η f' είναι αύξουσα.



Η κλίση της ακτίνας $\frac{f(x)}{x}$ είναι $+1$ στο $[0, x_0]$

η $\frac{f(x)}{x}$ μειώνεται συνεχώς μέχρι την τιμή $\frac{f(x_1)}{x_1}$

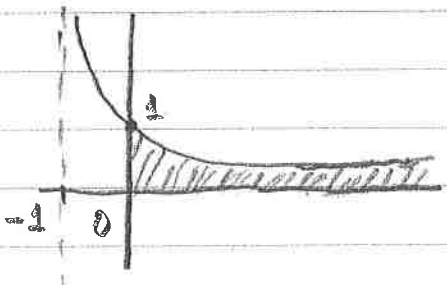
και μετά αυξάνεται συνεχώς.

(β) $f(x) = x^2 - \alpha x \ / \ [0,1]$

$f' = 2x - \alpha \qquad f''(x) = 2 > 0$ άρα η f είναι κυρτή.

Το στάσιμο $x = \frac{\alpha}{2}$ είναι ελάχιστο. Άρα το μέγιστο θα είναι σε ένα από τα άκρα $x=0$ ή $x=1$.
$f(0)=0$, $f(1) = 1-\alpha$ άρα θα πρέπει $1-\alpha > 0$ ή $\alpha < 1$.

(γ) $(x+1)y^2 = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \qquad f'(x) = \left((x+1)^{-\frac{1}{2}}\right)' = \left(-\frac{1}{2}\right)(x+1)^{-\frac{3}{2}} < 0$



$$\int_0^{+\infty} (x+1)^{-\frac{1}{2}} dx = \int_1^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} u^{\frac{1}{2}} \Big|_1^{+\infty} =$$

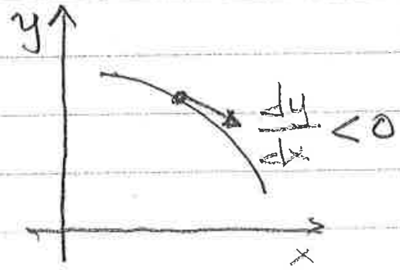
$$= \lim_{T \to +\infty} \left[-2\sqrt{u}\right]_1^T = \lim_{T \to +\infty} \left(-2\sqrt{T} + 2\right) = -\infty$$

(δ) Τυπογραφικό λάθος στο ερώτημα.

Θέμα 2: (α) $\alpha^2\beta+\alpha x-x^2=2$ Είναι η 2(α) Σεπτεβρίου 2010

όπου $\alpha = x$, $\beta = y$, $x = z$

(β)



Οι ισοσταθμικές έχουν αρνητική κλίση $\frac{dy}{dx}<0$ άρα $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ έχουν το ίδιο πρόσημο γιατί $y' = \frac{-f_x}{f_y}$

Άρα και η $\frac{\partial f}{\partial x}$ είναι αρνητική δηλαδή f x-φθίνουσα

. Εφόσον f οιονεί κοίλη (από το γράφημα) η $y''<0$

Συνεπώς, $y'<0$, $y''<0$ οπότε η f ορίζει αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης. (σελίδα 166) (γ) $f(x,y) = x^2 y - 2x - y \qquad \nabla f = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 2 = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1 = 0$

$xy = 1, \ x = +1, -1 \qquad x=1, y=1 \ , \ x=-1, y=-1$

$f_{xx} = 2y \quad f_{yy} = 0 \ , \ f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy-2) = 2x = f_{yx}$

$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 2y \cdot 0 - (2x)^2 = -4x^2 < 0$

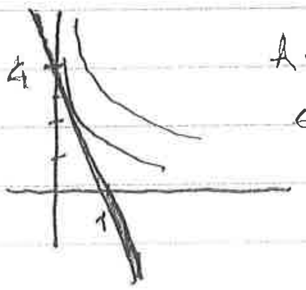
$\Rightarrow$ τα στάσιμα είναι σαγματικά σημεία.

(δ) $f(x,y) = xy \qquad g(x,y) = 4x + y = 4$

Η συνθήκη περιορισμένης στασιμότητας είναι:

(σελίδα 214-15) $\frac{f_x}{f_y} = \frac{g_x}{g_y} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{4}{1}$ & $g(x,y) = 4$

Άρα $y = 4x$ και $4x + y = 4$ δηλ. $4x + 4x = 4$, $8x = 4 \quad x = \frac{1}{2}, y = 2$



Αν η υπερβολή τέμνει την ευθεία σε δύο σημεία τότε η $x(4-4x) = c$ πρέπει να έχει δυο πραγματικές λύσεις άρα

$-4x^2 + 4x = c \ , \ 4x^2 - 4x + c = 0 \quad \Delta = 16 - 16c > 0$

Για $xy = 1$ παίρνουμε το περιορισμένο στάσιμο

$x = \frac{1}{2} \ y = 2 \qquad$ για $xy < 1$ έχουμε

$x(4-4x) < 1 \Rightarrow -4x^2 + 4x < 1 \ , \ 4x^2 - 4x + 1 > 0$

$(2x-1)^2 > 0$ ισχύει

για $xy>1$ έχουμε $x(4-4x)>1 \Rightarrow 4x^2-4x+1<0 \Leftrightarrow$

$(2x-1)^2<0$ άτοπο άρα για $xy<1$ η οικογένεια

υπερβολών τέμνει την ευθεία σε δύο σημεία και $f(x,y)<1$

ενώ για $xy>1$ δεν τέμνει την ευθεία. Συνεπώς

το στάσιμο δίνει μέγιστο $f(\frac{1}{2},2)=1$.