Εισαγωγή

Μιά εξίσωση που περιλαμβάνει μιά εξαρτημένη μεταβλητή φ και μία ή περισσότερες παραγώγους της φ, ως προς μία ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές, λέγεται διαφορική εξίσωση.

Πολλοί φυσικοί νόμοι σε επιστήμες όπως η φυσική, η χημεία, η βιολογία, η αστρονομία εκφράζονται με διαφορικές εξισώσεις.

Οι διαφορικές εξισώσεις συναντώνται πολύ συχνά και σε προβλήματα εφαρμογών, ιδιαίτερα σε τεχνικά προβλήματα των μηχανικών, αλλά και στα οικονομικά και σε πολλούς άλλους τομείς εφαρμογών.

Δεν είναι δύσκολο να αντιληφθούμε την αιτία της ευρύτατης χρήσης των διαφ. εξισώσεων. Υπενθυμίζουμε ότι αν $y=\varphi(x)$ μιά συνάρτηση, τότε η παράγωγός της $\frac{dy}{dx}$ ή $\varphi'(x)$ παριστάνει τον ρυθμό μεταβολής της ποσότητας y ως προς την ποσότητα x.

Σε μιά φυσική διαδικασία, οι ποσότητες που περιλαμβάνονται και οι ρυθμοί μεταβολής τους συνδέονται μεταξύ τους μέσω του φυσικού νόμου που διέπει την διαδικασία. Όταν η σχέση αυτή εκφρασθεί με μαθηματικά σύμβολα, το αποτέλεσμα συνήθως είναι να προκύψει μιά διαφ. εξίσωση.

<u>Παράδειγμα</u>: Σύμφωνα με τον νόμο του Newton η δύναμη που δέχεται ένα σώμα μάζας m και η επιτάχυνση που αυτό αποκτά, συνδέονται ως εξής:

$$F = m\cdot\gamma$$

Ας υποθέσουμε ότι το σώμα μάζας m πέφτει κατακόρυφα υπό την επίδραση της βαρύτητας, μόνον. Τότε η μόνη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι το βάρος $m\cdot g$. Αν y η απόσταση του σώματος από το σημείο που αφέθηκε τότε $\gamma = \frac{d^2y}{dt^2} = y''(t)$

Άρα $m\cdot g = m\cdot y''(t)$ και η διαφ. εξίσωση που προκύπτει είναι $y''(t) = g$.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι κατά την πτώση του σώματος υπάρχει αντίσταση του αέρα ανάλογη της ταχύτητας υ, $F_{αντ} = \kappa\upsilon = \kappa \frac{dy}{dt}$ τότε η $F = m \cdot \gamma$ γίνεται $mg - \kappa \frac{dy}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2}$ οπότε προκύπτει η διαφ. εξίσωση :

$$y''(t) = g - \frac{\kappa}{m} y'(t) .$$

Όταν η μεταβλητή φ εξαρτάται μόνον από μία ανεξάρτητη μεταβλητή, δηλαδή η φ είναι συνάρτηση μιάς μεταβλητής δηλ. $y = \varphi(t)$ τότε έχουμε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Παραδείγματα: $\frac{dy}{dt} = \kappa \cdot t \quad (1)$

$$f''(t) + 4f'(t) + f(t) = συνt \qquad (2)$$

Όταν η μεταβλητή φ εξαρτάται από δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές, δηλαδή η φ είναι συνάρτηση δύο ή περισσότερων μεταβλητών δηλ. $y = \varphi(t, s, \ldots)$ τότε έχουμε μερικές διαφορικές εξισώσεις (γιατί αυτές περιλαμβάνουν μερικές παραγώγους της φ).

Παραδείγματα: $\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s} + y \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \qquad (1)$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = 0 \qquad (2)$$

Προς το παρόν θα περιορισθούμε σε συνήθεις διαφ. εξισώσεις.

Τάξη μιάς διαφ. εξίσωσης ονομάζουμε την μέγιστη τάξη παραγώγου που εμφανίζεται στην διαφ. εξίσωση.

Γενικά μιά διαφ. εξίσωση μπορεί να εκφρασθεί με την

$$F\left(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(\nu)}(t)\right) = 0$$

όπου $F: \mathbb{R}^{\nu+2}$ (ή $\mathbb{C}^{\nu+2}$) $\longrightarrow \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$

Έχουμε τότε Δ.Ε. ν-τάξεως και αν η F είναι πολυωνυμική ως προς τις παραγώγους $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(\nu)}$ τότε **βαθμός** της Δ.Ε. είναι ο βαθμός του πολυωνύμου.

Παραδείγματα: $\left(y^{(3)}(t)\right)^2 + 6y' = 0$ 3ης τάξης 2ου βαθμού

$(y')^3 + t = 0$ 1ης τάξης 3ου βαθμού

Οι Δ.Ε. 1ου βαθμού είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στις εφαρμογές και λέγονται γραμμικές διαφ. εξισώσεις. (Γ.Δ.Ε.)

Η γενική μορφή της Γ.Δ.Ε. ν-τάξεως είναι:

$$\alpha_0(t)\,y^{(\nu)}(t) + \alpha_1(t)\,y^{(\nu-1)}(t) + \cdots + \alpha_\nu(t)\,y(t) = b(t) \qquad (3)$$

Λύση μιάς Δ.Ε. σε ένα διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι μιά συνάρτηση που είναι διαφορίσιμη όσες φορές απαιτεί η Δ.Ε. και η οποία ικανοποιεί την Δ.Ε.

Παράδειγμα: Η $y(t) = e^{kt}$ είναι λύση της $y' = ky$ γιατί $(e^{kt})' = ke^{kt}$

Το πρόβλημα που απασχολεί την θεωρία των διαφορικών εξισώσεων είναι η εύρεση όλων των δυνατών λύσεων μιάς Δ.Ε. και η μελέτη της συμπεριφοράς των λύσεων αυτών.

Γενική λύση μιάς Δ.Ε. είναι μια συνάρτηση που περιλαμβάνει μία ή περισσότερες αυθαίρετες σταθερές (ή μιά οικογένεια συναρτήσεων) η οποία είναι λύση της Δ.Ε. και από τον τύπο της οποίας μπορεί να προκύψει κάθε λύση της Δ.Ε. με κατάλληλη επιλογή των σταθερών.

Παραδείγματα: Η γενική λύση της $y' = ky$ είναι η $y(t) = c\,e^{kt}$ όπου C αυθαίρετη σταθερά.

Κάθε λύση που προκύπτει από μιά συγκεκριμένη τιμή της σταθεράς C αποτελεί εξίσωση μιάς καμπύλης η οποία λέγεται ολοκληρωτική καμπύλη της Δ.Ε. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η γενική λύση μιας Δ.Ε. αποτελείται από μιά οικογένεια καμπυλών και όταν η οικογένεια αυτή παράγεται από τις διαφορετικές τιμές που παίρνει μία μόνο παράμετρος (η C) τότε λέγεται μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών.

Η Δ.Ε. (3) λέγεται ομογενής αν $b(t) \equiv 0$.
Η λύση $y(t) \equiv 0$ της ομογενούς λέγεται τετριμμένη λύση.

Μερική Λύση: μιά λύση της Δ.Ε. που προκύπτει από μια συγκεκριμένη επιλογή των παραμέτρων.

I. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε. 1ης τάξης

Η γενική μορφή τους είναι: $$y' + p(t)\,y = g(t) \qquad (4)$$
όπου $p(\cdot), g(\cdot)$ συνεχείς.

Για να μετατρέψουμε την (4) σε μιά μορφή που α μας δώσει την ζητούμενη συνάρτηση $y(\cdot)$ με ολοκλήρωση, πολλαπλασιάζουμε την (4) με έναν κατάλληλο παράγοντα ο οποίος λέγεται ολοκληρωτικός παράγων. Γιά την (4) ο παράγων αυτός είναι ο $e^{u(t)}$ όπου $u(t) = \int p(t)\,dt$.

Έχουμε:
$$e^{u(t)} y'(t) + p(t)\,e^{u(t)} y(t) = g(t)\,e^{u(t)} \Rightarrow$$
$$\left(e^{u(t)} y(t)\right)' = g(t)\,e^{u(t)} \Rightarrow e^{u(t)} y(t) = \int g(t)\,e^{u(t)}\,dt + c$$
$$\Rightarrow y(t) = e^{-u(t)}\left[\int g(t)\,e^{u(t)}\,dt + c\right] \qquad (5)$$

Η (5) είναι η γενική λύση της (4).

Παραδείγματα: 1) $y' + 2ty = t$ (Λύση: $y = ce^{-t^2} + \frac{1}{2}$)

2) $y' - \frac{2}{t}y = t^3$, $t>0$ (Λύση: $y = \frac{t^4}{2} + ct^2$)

Ασκήσεις: 1) $y' = y+1$, $y(0)=1$ ($y = -1 + 2e^t$)

2) $y' = -y + \pi$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$ ($y = \pi - \frac{\pi}{2}e^{-t}$)

3) $y' + 2y = 4$ ($y = 4te^{-2t} + ce^{-2t}$)

4) $y' + \alpha y = b$ ($y = \frac{b}{\alpha} + ce^{-\alpha t}$)

5) $y' - \frac{2}{t}y = t^4$ ($y = \frac{t^5}{3} + ct^2$)

6) $y' - 2y = e^{2t}\eta\mu t$ ($y = -e^{2t}\sigma\upsilon\nu t + ce^{2t}$)

7) $y' - 2ty = 3t$ ($y = -\frac{3}{2} + ce^{t^2}$)

8) $y' + y = e^t$ ($y = \frac{1}{2}e^t + ce^{-t}$)

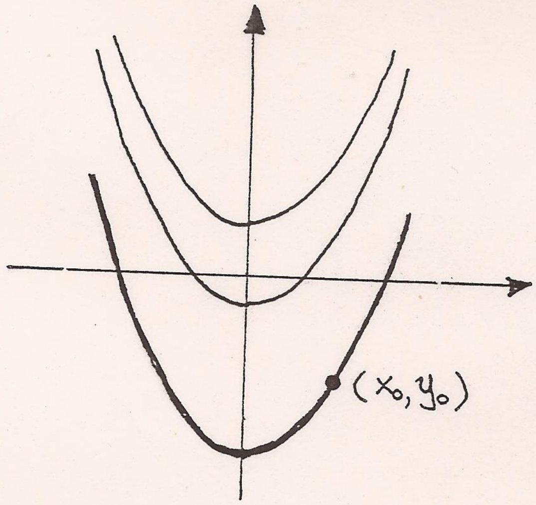
9) $ty' - 2y = -2t$ ($y = 2t + ct^2$)

10) $\frac{dy}{dx} = \alpha x y$ ($y = ce^{\frac{\alpha x^2}{2}}$)

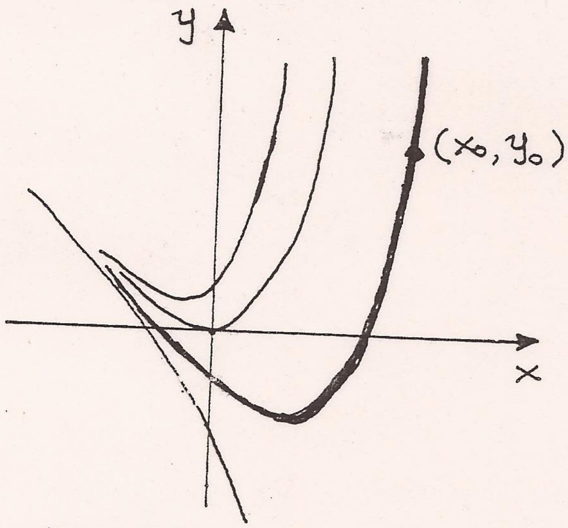
11) Να βρεθεί η καμπύλη του επιπέδου που διέρχεται από το (0,1) και ικανοποιεί την $\frac{dy}{dx} = x \cdot y$.
($y = e^{x^2/2}$)

Η γενική λύση της (4) παριστάνει μια οικογένεια (μονοπαραμετρική) καμπυλών στο επίπεδο. Εάν δίδεται μιά αρχική (οριακή) συνθήκη της μορφής $y(t_0) = y_0$ τότε προσδιορίζουμε την λύση της Δ.Ε. που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη και η οποία παριστάνει μ ί α καμπύλη.

Παράδειγμα: $y' = x$ με γενική λύση $y = \frac{x^2}{2} + c$



Παράδειγμα: $y' = y + x$ με γενική λύση $y = ce^{x} - (x+1)$



Οι καμπύλες $y = \varphi(x, c)$ λέγονται μονοπαραμετρικές και η οικογένεια για τις διάφορες τιμές του c, μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών.

Εφαρμογές

1. Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα έχει μπαταρία που δίνει E volt, αντίσταση R και πηνίο L. Όταν ανοίξουμε τη μπαταρία το ρεύμα I ικανοποιεί την Δ.Ε.

$$(*) \quad L\frac{dI}{dt} + R\cdot I = E \quad , \quad I(0)=0$$

α) Βρείτε την $I(t)$

β) Δείξτε τον νόμο του Ohm $\quad I = \frac{E}{R}$

$$(*) \Rightarrow I'(t) + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L} \Rightarrow e^{\frac{R}{L}t}\cdot I' + \frac{R}{L}I e^{\frac{R}{L}t} = \frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t}$$

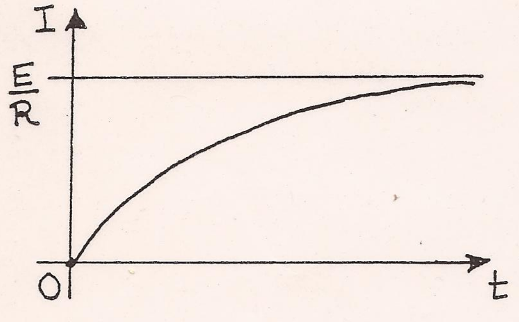
$$\Rightarrow \left(e^{\frac{R}{L}t}\cdot I\right)' = \frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t} \Rightarrow e^{\frac{R}{L}t}\cdot I = \frac{E}{L}\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t} + c$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{E}{R} + c\,e^{-\frac{R}{L}t} \quad , \quad I(0)=0 \Rightarrow c = -\frac{E}{R}$$

Άρα $\quad I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

Ο όρος $\frac{E}{R}$ λέγεται σταθερός ή σταθερή κατάσταση.

Ο όρος $-\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$ λέγεται παροδικός ή παροδική κατάσταση,



γιατί το $I(t)$ πολύ γρήγορα προσεγγίζει την σταθερή τιμή $\frac{E}{R}$.

2. Ο νόμος του Newton για την απώλεια θερμότητας των σωμάτων λέει ότι ο ρυθμός με τον οποίο μειώνεται η θερμοκρασία ενός σώματος είναι ανάλογος με την διαφορά της θερμοκρασίας του σώματος από το περιβάλλον. Ένα σώμα θερμαίνεται στους 110° C και τοποθετείται σε περιβάλλον 10° C. Μετά από μία ώρα η θερμοκρασία του είναι 60°C. Πόση ώρα ακόμη πρέπει να το αφήσουμε για να πέσει η θερμοκρασία του στους 30° C;

(Νόμος Newton) $\frac{d\theta}{dt} = \kappa(\theta - 10)$, $\theta(0) = 110°C$

$\theta(1) = 60°C$

$$\frac{d\theta}{\theta - 10} = \frac{d(\theta - 10)}{\theta - 10} = \kappa dt \Rightarrow \ln(\theta - 10) = \kappa t + c_1$$

$$\Rightarrow \theta - 10 = e^{\kappa t} \cdot e^{c_1} = c e^{\kappa t} \Rightarrow \theta(t) = 10 + c e^{\kappa t}$$

$\theta(0) = 10 + c = 110 \Rightarrow c = 100$

$\theta(1) = 10 + 100 e^{\kappa} = 60 \Rightarrow 100 e^{\kappa} = 50 \Rightarrow e^{\kappa} = \frac{1}{2} \Rightarrow \kappa = \ln 2^{-1} = -\ln 2$

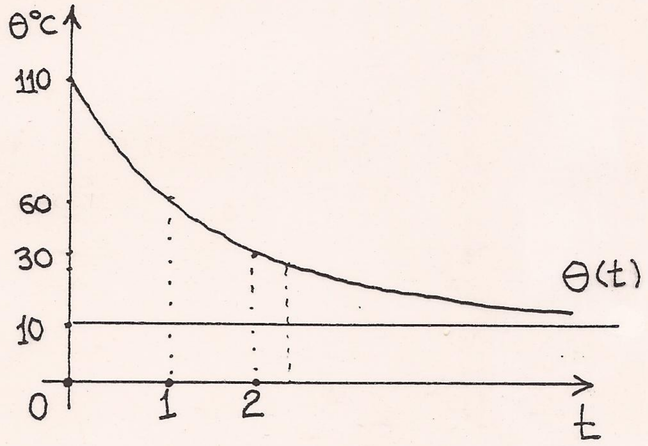
$\Rightarrow \kappa = -\ln 2$

Άρα $\theta(t) = 10 + 100 e^{-\ln 2 \cdot t}$

$$\theta(\bar{t}) = 10 + 100 e^{-\bar{t}\ln 2} = 30 \Rightarrow e^{-\bar{t}\ln 2} = \frac{1}{5} \Rightarrow -\bar{t}\ln 2 = \ln 5^{-1} = -\ln 5$$

$$\Rightarrow \bar{t} = \frac{\ln 5}{\ln 2}$$

Συνεπώς πρέπει να αφεθεί $t_1 = \bar{t} - 1 = \frac{\ln 5}{\ln 2} - 1$ ώρες ακόμη



II. Ακριβείς Δ.Ε.

Έστω M, N συναρτήσεις ορισμένες σε ένα ανοικτό ορθογώνιο $R \subseteq \mathbb{R}^2$.

Η Δ.Ε.

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad , (x,y) \in R \qquad (1)$$

λέγεται <u>ακριβής</u> αν υπάρχει συνάρτηση f δύο μεταβλητών για την οποία $M(x,y) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $N(x,y) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ για κάθε $(x,y) \in R$.

Όταν η Δ.Ε. είναι ακριβής έχουμε:

$$f(x,y) = c \Leftrightarrow \frac{df(x,y)}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow$$

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Άρα οι καμπύλες που ορίζονται από την $f(x,y) = c$ για διάφορες τιμές του c είναι λύσεις της (1).

<u>Παράδειγμα:</u> Η Δ.Ε. $e^{2y} + 2x e^{2y}\dfrac{dy}{dx} = 0 \quad (2)$ είναι ακριβής γιατί για $f(x,y) = x e^{2y}$ έχουμε:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^{2y} = M(x,y) \quad \text{και} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2x e^{2y} = N(x,y)$$

Άρα η γενική λύση της (2) είναι: $x e^{2y} = c \Rightarrow e^{2y} = \dfrac{c}{x}$
$\Rightarrow 2y = \ln\dfrac{c}{x} \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{c}{x}$.

Επειδή δεν είναι εύκολο να ελέγχουμε αν μιά Δ.Ε. είναι ακριβής με βάση τον ορισμό χρησιμοποιούμε το ακόλουθο κριτήριο.

<u>Θεώρημα:</u> Έστω ότι οι $M(\cdot,\cdot)$ και $N(\cdot,\cdot)$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο R. Τότε η (1) είναι ακριβής αν και μόνον αν:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \quad \text{για κάθε } (x,y) \in R.$$

<u>Παράδειγμα:</u> $\quad x y^3 dx + x^3 y\, dy = 0 \quad (3)$

$$M(x,y) = xy^3 \; , \; N(x,y) = x^3 y \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 x \; , \; \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 y$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ άρα η (3) δεν είναι ακριβής.

<u>Παράδειγμα:</u> Εξετάστε αν η Δ.Ε. $\left(3x^2 y + \text{συν}x\right) + x^3 \dfrac{dy}{dx} = 0 \quad (4)$
είναι ακριβής και αν ναί βρείτε τη λύση που διέρχεται από το σημείο $(\pi, 1)$.

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 \; , \; \dfrac{\partial N}{\partial x} = 3x^2$ άρα η (4) είναι ακριβής.

Για να βρούμε μιά f τέτοια ώστε $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N$

<u>ολοκληρώνουμε ως προς x την M</u> και έχουμε:

$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + h(y)$ όπου $h(y)$ η σταθερά για κάθε y.

$$= \int (3x^2 y + \text{συν}x)\,dx + h(y) = x^3 y + \text{ημ}x + h(y)$$

Για να βρούμε την συνάρτηση $h(y)$ <u>παραγωγίζουμε ως προς y την f</u> και παίρνουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + h'(y) \quad \text{άρα} \quad N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + h'(y) \quad \Rightarrow$$

$$x^3 + h'(y) = x^3 \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c_1$$

Συνεπώς $f(x,y) = c_2 \Rightarrow x^3 y + \text{ημ}x + c_1 = c_2 \Rightarrow x^3 y + \text{ημ}x = c$
$f(\pi, 1) = c \Rightarrow \pi^3 + \text{ημ}\pi = c \Rightarrow c = \pi^3$ άρα η λύση που ζητείται

είναι $\quad y x^3 + \text{ημ}x = \pi^3$

<u>Παράδειγμα:</u> Να λυθεί η Δ.Ε. $\sigma\upsilon\nu y\,dx + (3y^2 - x\,\eta\mu y)\,dy = 0$ (5)

$M(x,y) = \sigma\upsilon\nu y \quad , \quad N(x,y) = 3y^2 - x\,\eta\mu y$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = -\eta\mu y = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ άρα η (5) είναι ακριβής.

$f(x,y) = \int M(x,y)dx + h(y) = \int \sigma\upsilon\nu y\,dx + h(y) = x\,\sigma\upsilon\nu y + h(y)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -x\,\eta\mu y + h'(y) = N(x,y) = 3y^2 - x\,\eta\mu y \Rightarrow h'(y) = 3y^2$

άρα $h(y) = y^3 + c_1$ άρα $f(x,y) = c_2 \Rightarrow x\,\sigma\upsilon\nu y + y^3 + c_1 = c_2$

$\Rightarrow \quad x\,\sigma\upsilon\nu y + y^3 = c$

<u>Ασκήσεις</u>: 1) $2xy\,dx + x^2 dy = 0$ 2) $y^2 + xy\dfrac{dy}{dx} = 0$

3) $x + y\dfrac{dy}{dx} = 0$ 4) $(8y - x^2 y)\,dy + (x - xy^2)\,dx = 0$

5) $2x\ln x\,\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

6) Δείξτε ότι μιά Δ.Ε. της μορφής $f(x)dx + g(y)dy = 0$

Ολοκληρωτικοί Παράγοντες

Ας θεωρήσουμε την Δ.Ε. $(1+x^2y^2+y) + x\frac{dy}{dx} = 0$ (1)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1+2yx^2 \neq 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$$ άρα η (1) δεν είναι ακριβής.

Πολλαπλασιάζοντας όμως και τα δύο μέλη της (1) με τον παράγοντα $\frac{1}{1+x^2y^2}$ έχουμε:

$$\frac{1+x^2y^2+y}{1+x^2y^2} + \frac{x}{1+x^2y^2}\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow 1+\frac{y}{1+x^2y^2} + \frac{x}{1+x^2y^2}\frac{dy}{dx} = 0 \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= 1+\frac{y}{1+x^2y^2}, & \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} \\ N(x,y) &= \frac{x}{1+x^2y^2}, & \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} \end{aligned}\right\}$$ άρα η (2) ακριβής.

$$f(x,y) = \int\left(1+\frac{y}{1+x^2y^2}\right)dx = x + \varepsilon\varphi^{-1}(xy) + h(y)$$

$$N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \frac{x}{1+x^2y^2} = h'(y) + \frac{\partial\, \varepsilon\varphi^{-1}(xy)}{\partial(xy)}\frac{\partial(xy)}{\partial y} = h'(y) + \frac{x}{1+x^2y^2}$$

$$\Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c_1$$

$$f(x,y) = c_2 \Rightarrow x + \varepsilon\varphi^{-1}(xy) + c_1 = c_2 \Rightarrow x + \varepsilon\varphi^{-1}(xy) = c$$

$$\Rightarrow xy = \varepsilon\varphi(c-x) \Rightarrow y = \frac{\varepsilon\varphi(c-x)}{x}, \quad x\neq 0 \quad (3)$$

Η (3) ικανοποιεί τις (2) και (1). Άρα η (3) είναι λύση της (1).

Ο παράγοντας $\frac{1}{1+x^2y^2}$ λέγεται <u>ολοκληρωτικός παράγων</u>.

Γενικά, ένας παράγοντας $u(x,y)$ με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε μιά Δ.Ε. : $M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$ που <u>δεν</u> είναι ακριβής και παίρνουμε μία ακριβή Δ.Ε. : $u(x,y)M(x,y) + u(x,y)N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$ λέγεται ολοκληρωτικός παράγων.

Μερικές φορές ο ολοκληρωτικός παράγων είναι εύκολο να βρεθεί.

<u>Παράδειγμα:</u> $y\,dx - x\,dy = 0$ όχι ακριβής, αλλά η $\frac{dx}{y} - \frac{x}{y^2}dy = 0$ $(y \neq 0)$ είναι ακριβής με λύση $y = cx$.

Όμως τις περισσότερες φορές ο ολοκλ. παράγων είναι δύσκολο να βρεθεί.

Μπορούμε να δείξουμε ότι μια $u : R \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους είναι ολοκλ. παράγων αν και μόνον αν :

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (4)$$

Η μερική Δ.Ε. (4) γενικά είναι δύσκολο να λυθεί.

Μπορούμε όμως, αν ένας ολοκλ. παράγων είναι ανεξάρτητος του x ή του y, να τον προσδιορίσουμε σχετικά εύκολα.

<u>Θεώρημα 1 :</u> Αν η $M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$ (5) έχει έναν ολοκλ. παράγοντα $u = u(x)$ (δηλ. ανεξάρτητο του y) τότε η συνάρτηση

$$p = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

είναι μιά συνεχής συνάρτηση του x μόνον και ένας ολοκλ. παράγων δίνεται από την $u(x) = e^{\int p(x)dx}$

<u>Θεώρημα 2 :</u> Αν η (5) έχει ολοκλ. παράγοντα $u = u(y)$ (ανεξάρτητο του x), τότε η συνάρτηση : $q = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ είναι συνεχής συνάρτηση του y μόνον και ένας ολοκλ. παράγων δίνεται από την $u(y) = e^{\int q(y)dy}$

Ασκήσεις

1. Δίνεται η Γ.Δ.Ε. 1ης τάξης $y' + \alpha(x) y = b(x)$ με $\alpha(\cdot), b(\cdot)$ συνεχείς στο $I \subseteq \mathbb{R}$.
   (i) Δείξτε ότι υπάρχει ολοκλ. παράγων $u(x)$, (ανεξάρτητος του y)
   (ii) Λύστε την Δ.Ε.

2. Να λυθούν οι ακόλουθες Δ.Ε. αφού βρεθούν κατάλληλοι ολοκλ. παράγοντες

   α) $(2y^3+2)\,dx + 3xy^2\,dy = 0$

   β) $\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y - 2\,\eta\mu x\,\eta\mu y\,\dfrac{dy}{dx} = 0$

   γ) $5x^3y^2 + 3x^4y\,\dfrac{dy}{dx} = 0$

   δ) $(e^y + xe^y)\,dx + xe^y\,dy = 0$

1. Δύο φλυτζάνια καφέ σερβίρονται στον Πρωθυπουργό και τον Πρόεδρο Δημοκρατίας. Η θερμοκρασία του καφέ είναι ίδια και στα δύο φλυτζάνια. Ο Πρόεδρος προσθέτει μιά μικρή ποσότητα κρύου γαλατος αμέσως αλλά αρχίζει να πίνει τον καφέ του 10 λεπτά αργότερα. Ο Πρωθυπουργός περιμένει 10 λεπτά και μετά προσθέτει την ίδια ποσότητα γάλα στον καφέ του αρχίζοντας να πίνει. Ποιός πίνει ζεστότερο τον καφέ του;

2. Η ειδική θεωρία της σχετικότητος του Einstein λέει ότι η μάζα m σωματιδίου που κινείται με ταχύτητα υ δίνεται από τον τύπο:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

όπου c η ταχύτητα του φωτός και m_0 η μάζα σε ακινησία.

a. Αν το σωματίδιο αρχίζει να κινείται (από την ακινησία) στο κενό και κινηθεί για μεγάλο χρονικό διάστημα υπό την επίδραση σταθερού βαρυτικού πεδίου (επιτάχυνσης A) βρείτε την υ σαν συνάρτηση του χρόνου t και δείξτε ότι $\upsilon \to c$ όταν $t \to \infty$.

b. Αν $M = m - m_0$, η αύξηση της μάζας και E η αύξηση της ενέργειας από το έργο που παράγει η F, δηλαδή:

$$E = \int_0^{\upsilon} F\,dx = \int_0^{\upsilon} \frac{d}{dt}(m\upsilon)\,dx = \int_0^{\upsilon} \upsilon\, d(m\upsilon)$$

δείξτε ότι: $E = Mc^2$

3. Σύμφωνα με τον νόμο του Torricelli, το νερό που χύνεται από μιά μικρή οπή στον πυθμένα ενός δοχείου έχει την ταχύτητα που θα αποκτούσε αν έπεφτε ελεύθερα από ύψος ίσο με το ύψος της επιφάνειας του νερού στο δοχείο. Η κλεψύδρα, ένα αρχαίο χρονόμετρο ήταν ένα δοχείο με μιά μικρή οπή στον πυθμένα. Βρείτε το σχήμα της, αν γνωρίζουμε ότι η στάθμη του νερού πρέπει να πέφτει με σταθερό ρυθμό.

III. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε. 2ης τάξης – ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Οι Γ.Δ.Ε. 2ης τάξης – ομογενείς με σταθερούς συντελεστές έχουν την γενική μορφή:

$$y''(t) + \alpha y'(t) + b\cdot y(t) = 0 \qquad (1)$$

Ονομάζουμε <u>χαρακτηριστικό πολυώνυμο</u> της (1) το

$$P(\rho) := \rho^2 + \alpha\rho + b$$

Όπως γνωρίζουμε από την στοιχειώδη άλγεβρα το P μπορεί να έχει:

(i) δύο πραγματικές άνισες ρίζες, (ii) μία πραγματική ρίζα (με πολλαπλότητα 2), (iii) δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες ($u \pm iv$)

Πριν προχωρήσουμε θυμίζουμε ότι για μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

$$e^{iz} = \text{συν}z + i\,\text{ημ}z$$

Αν $z = \alpha + i\beta$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ τότε:

$$e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha}\cdot e^{i\beta} = e^{\alpha}(\text{συν}\beta + i\,\text{ημ}\beta)$$

Επίσης $\frac{d}{dt}e^{zt} = z\,e^{zt}$

Για κάθε συνάρτηση φ, δυό φορές παραγωγίσιμη, η έκφραση $\varphi'' + \alpha\varphi' + b\varphi$ είναι μιά συνάρτηση την οποία θα συμβολίζουμε με $L(\varphi)$. Ο L λέμε οτι είναι ένας διαφορικός τελεστής. Με τον συμβολισμό αυτό η (1) γράφεται $L(y) = 0$

<u>Πρόταση 1</u>: $L(e^{\rho t}) = 0 \iff P(\rho) = 0$

$$L(e^{\rho t}) = 0 \iff \rho^2 e^{\rho t} + \alpha\rho e^{\rho t} + b e^{\rho t} = 0 \iff \rho^2 + \alpha\rho + b = 0 \iff P(\rho) = 0$$

<u>Θεώρημα 1</u>: i) Αν p_1, p_2 διακεκριμμένες ρίζες του $P(p)$ τότε οι συναρτήσεις $y_1(t) = e^{p_1 t}$, $y_2(t) = e^{p_2 t}$ είναι λύσεις της (1).
ii) Αν p διπλή ρίζα του P τότε οι $y_1(t) = e^{pt}$, $y_2(t) = te^{pt}$ είναι λύσεις της (1).

Απόδειξη: i) Από την πρόταση 1 (εφ' όσον $P(p_1) = P(p_2) = 0$).

ii) Από την Αλγεβρα γνωρίζουμε ότι αν p ρίζα με πολλαπλότητα m ενός πολυωνύμου P, $\deg P \geq 1$, τότε:

$$P(p) = P'(p) = P''(p) = \cdots = P^{(m-1)}(p) = 0 \quad \text{και} \quad P^{(m)}(p) \neq 0$$

Άρα για $m=2$, $P(p) = P'(p) = 0$.

$$L(te^{pt}) = (te^{pt})'' + \alpha(te^{pt})' + bte^{pt} = (e^{pt} + tpe^{pt})' + \alpha(e^{pt} + tpe^{pt})$$
$$+ bte^{pt} = pe^{pt} + pe^{pt} + p^2 te^{pt} + \alpha e^{pt} + \alpha tpe^{pt} + bte^{pt} =$$
$$= e^{pt}(2p + p^2 t + \alpha + \alpha pt + bt) = e^{pt}[2p + \alpha + t(p^2 + \alpha p + b)] =$$
$$= e^{pt}[P'(p) + tP(p)] = 0.$$

Άρα η $y_2(t) = te^{pt}$ είναι λύση της (1).

<u>Πρόταση 2</u>: Αν y_1, y_2, δύο λύσεις της (1) τότε η $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ είναι λύση της (1). Δηλαδή αν $L(y_1) = L(y_2) = 0$, τότε $L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = 0$.

Απόδειξη:
$$\begin{aligned} L(c_1y_1 + c_2y_2) &= (c_1y_1 + c_2y_2)'' + \alpha(c_1y_1 + c_2y_2)' + b(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + \alpha c_1 y_1' + \alpha c_2 y_2' + bc_1y_1 + bc_2y_2 \\ &= c_1(y_1'' + \alpha y_1' + by_1) + c_2(y_2'' + \alpha y_2' + by_2) \\ &= c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2) = 0 \end{aligned}$$

Το σύνολο των λύσεων της (1) αποτελεί μια οικογένεια καμπυλών. Το πρόβλημα προσδιορισμού μιάς καμπύλης που να ανήκει στην οικογένεια των λύσεων και να ικανοποιεί ένα ζεύγος αρχικών συνθηκών $y(t_0) = A$, $y'(t_0) = B$ λέγεται πρόβλημα αρχικών τιμών.

- <u>Πρόβλημα Αρχικών Τιμών</u> (Π.Α.Τ.)

Να βρεθεί λύση της $L(y) = 0$ τέτοια ώστε $y(t_0) = A$, $y'(t_0) = B$

Θεώρημα: (Ύπαρξης και Μονοσήμαντου της Λύσης του Π.Α.Τ.)

Αν y_1, y_2 οι λύσεις της (1) $y_1 = e^{\rho_1 t}$, $y_2 = e^{\rho_2 t}$ με $\rho_1 \neq \rho_2$
ή y_1, y_2 οι λύσεις της (1) $y_1 = e^{\rho t}$, $y_2 = t e^{\rho t}$ αν ρ διπλή ρίζα του χαρακτ. πολυωνύμου, τότε το Π.Α.Τ. έχει λύση της μορφής $c_1 y_1 + c_2 y_2$ και αυτή είναι μοναδική. Δηλαδή τα c_1, c_2 είναι μοναδικά και εξαρτώνται από τα A, B.

Θεώρημα: Έστω y_1, y_2 λύσεις της $L(y) = 0$ που δίνονται από τις:

i) $y_1(t) = e^{\rho_1 t}$, $y_2(t) = e^{\rho_2 t}$ αν $\rho_1 \neq \rho_2$ (ρ_1, ρ_2 ρίζες του P)

ii) $y_1(t) = e^{\rho t}$, $y_2(t) = t e^{\rho t}$ αν ρ διπλή ρίζα του P.

α) Αν c_1, c_2 σταθερές τότε η $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ είναι λύση της $L(y) = 0$.

β) Αντίστροφα, αν y είναι μιά λύση της $L(y) = 0$ τότε υπάρχουν μοναδικές σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

Απόδειξη: α) Από Πρόταση 2

β) Έστω y λύση της $L(y) = 0$. Θέτουμε $y(t_0) = A$, $y'(t_0) = B$ όπου $t_0 \in I$. Από το Θεωρ. Υπαρξ. Μονοσ. Λύσης του Π.Α.Τ. υπάρχουν μοναδικά c_1, c_2 τέτοια ώστε η $\phi = c_1 y_1 + c_2 y_2$ να είναι λύση του Π.Α.Τ.: $L(\phi) = 0$, $\phi(t_0) = A$, $\phi'(t_0) = B$. Από το μονοσήμαντο παίρνουμε ότι $\phi = y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

Γραμμική Εξάρτηση – Ανεξαρτησία

Δύο συναρτήσεις ϕ_1, ϕ_2 ορισμένες στο διάστημα I λέγονται <u>γραμμικά εξαρτημένες</u> (στο I) αν υπάρχουν c_1, c_2 (όχι και τα δύο μηδέν) τέτοια ώστε $c_1 \phi_1(t) + c_2 \phi_2(t) = 0 \quad \forall\, t \in I$.

Οι ϕ_1, ϕ_2 λέγονται <u>γραμμικά ανεξάρτητες</u> αν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένες. Δηλαδή αν $c_1 \phi_1(t) + c_2 \phi_2(t) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$.

<u>Παράδειγμα:</u> 1) Οι συναρτήσεις $e^{p_1 t}, e^{p_2 t}$ με $p_1 \neq p_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Γιατί, αν $c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} = 0$ τότε $c_1 + c_2 e^{(p_2 - p_1)t} = 0$ $\forall\, t \in I$ και παραγωγίζοντας $c_2 (p_2 - p_1) e^{(p_2 - p_1)t} = 0$ άρα $c_2 = 0$ οπότε και $c_1 = 0$.

2) Οι συναρτήσεις $e^{pt}, t e^{pt}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, γιατί αν $c_1 e^{pt} + c_2 t e^{pt} = 0$ τότε $c_1 + c_2 t = 0$ και παραγωγίζοντας $c_2 = 0$ οπότε και $c_1 = 0$.

Υπάρχει ένας σχετικά απλός τρόπος να ελέγχουμε αν δύο συναρτήσεις ϕ_1, ϕ_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο I ή όχι. Περιλαμβάνει την ορίζουσα (συνάρτηση):

$$W(\phi_1, \phi_2) = \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{vmatrix}$$

η οποία λέγεται η Wronskian (ορίζουσα Wronski) των ϕ_1, ϕ_2. Είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το I και τιμές για κάθε $t \in I$, $W(\phi_1, \phi_2)(t)$.

<u>Θεώρημα:</u> Δύο λύσεις της $L(y) = 0$, ϕ_1, ϕ_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν και μόνον αν $W(\phi_1, \phi_2)(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in I$.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $W(\phi_1, \phi_2)(t) \neq 0$ $\forall\, t \in I$ και $c_1 \phi_1(t) + c_2 \phi_2(t) = 0$. Τότε και $c_1 \phi_1'(t) + c_2 \phi_2'(t) = 0$ $\forall\, t$. Εφ' όσον $\begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{vmatrix}(t) \neq 0$ $\forall\, t \in I$, έχουμε $c_1 = c_2 = 0$. Άρα ϕ_1, ϕ_2 γραμμικά ανεξάρτητες.

Αν τώρα οι ϕ_1, ϕ_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες (στο I), ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $t_0 \in I$ τέτοιο ώστε $W(\phi_1, \phi_2)(t_0) = 0$. Τότε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} c_1 \phi_1(t_0) + c_2 \phi_2(t_0) = 0 \\ c_1 \phi_1'(t_0) + c_2 \phi_2'(t_0) = 0 \end{array}\right\} \quad (S)$$

έχει μη μηδενική λύση $(c_1, c_2) \neq (0,0)$.

Αν c_1, c_2 μιά τέτοια λύση, η συνάρτηση $y = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ είναι λύση της $L(y)=0$ και από (S) έχουμε: $y(t_0)=0$, $y'(t_0)=0$.
Από το Θεωρ. Υπαρξ.-Μονοσήμαντου έχουμε ότι η y είναι η τετριμμένη λύση $y \equiv 0$. Άρα $y(t)=0 \;\; \forall\, t \in I$ και τότε $c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) = 0$ $\forall\, t$ με $(c_1, c_2) \neq (0,0)$. Αυτό όμως αντιφάσκει με την γραμμική ανεξαρτησία των ϕ_1, ϕ_2. Άτοπο. Άρα $W(\phi_1,\phi_2)(t) \neq 0 \;\; \forall\, t \in I$.

<u>Πόρισμα:</u> Αν ϕ_1, ϕ_2 λύσεις της $L(y)=0$ (στο I) και $t_0 \in I$, τότε οι ϕ_1, ϕ_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες (στο I) αν και μόνον αν $W(\phi_1,\phi_2)(t_0) \neq 0$

<u>Απόδειξη:</u> Αν ϕ_1, ϕ_2 γραμμ. ανεξάρτητες τότε $W(\phi_1,\phi_2)(t) \neq 0 \;\; \forall\, t$, άρα και $W(\phi_1,\phi_2)(t_0) \neq 0$. Έστω $W(\phi_1,\phi_2)(t_0) \neq 0$. Αν $c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) = 0 \;\; \forall\, t$ τότε και $c_1\phi_1'(t) + c_2\phi_2'(t) = 0$. Άρα

$$\left.\begin{aligned} c_1\phi_1(t_0) + c_2\phi_2(t_0) &= 0 \\ c_1\phi_1'(t_0) + c_2\phi_2'(t_0) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{και} \quad W(\phi_1,\phi_2)(t_0) \neq 0$$

συνεπώς $c_1 = c_2 = 0$. Δηλαδή ϕ_1, ϕ_2 γραμμικά ανεξάρτητες.

<u>Θεώρημα:</u> Έστω ϕ_1, ϕ_2 δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $L(y)=0$. Τότε κάθε λύση της $L(y)=0$ γράφεται ως $\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $t_0 \in I$. Εφ' όσον ϕ_1, ϕ_2 γραμμ. ανεξάρτητες $W(\phi_1,\phi_2)(t_0) \neq 0$
Θέτουμε $\phi(t_0) = A$ και $\phi'(t_0) = B$, (όπου ϕ λύση της $L(y)=0$) και θεωρούμε τις:

$$c_1\phi_1(t_0) + c_2\phi_2(t_0) = A$$
$$c_1\phi_1'(t_0) + c_2\phi_2'(t_0) = B$$

. Εφ' όσον $W(\phi_1,\phi_2)(t_0) \neq 0$ υπάρχει μοναδική λύση (c_1, c_2). Τότε η $y = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ είναι λύση της $L(y)=0$ και $y'(t_0) = B$, $y(t_0) = A$ άρα από την μοναδικότητα της λύσης του Π.Α.Τ. έχουμε $\phi = y$ δηλαδή $\phi(t) = y(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t)$.
Συνεπώς $\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$

Η σημασία του παραπάνω θεωρήματος βρίσκεται στο ότι η γενική λύση της $L(y)=0$ έχει τη μορφή $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ όπου y_1, y_2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $L(y)=0$.

Λύσεις της $L(y) = y'' + \alpha y' + b = 0$

1. Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P(p) = p^2 + \alpha p + b$ έχει <u>δύο πραγματικές και άνισες ρίζες</u> p_1, p_2 οι $y_1 = e^{p_1 t}$, $y_2 = e^{p_2 t}$ είναι, όπως έχουμε δεί, γραμμ. ανεξάρτητες, οπότε η γενική λύση της $L(y) = 0$ είναι:

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}}$$

2. Αν το $P(p)$ έχει <u>μία διπλή ρίζα p</u> τότε οι e^{pt}, $t e^{pt}$, όπως έχουμε δεί, είναι γραμμ. ανεξάρτητες οπότε η γενική λύση της $L(y)=0$ είναι:

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{pt} + c_2 t e^{pt}}$$

3. Αν το $P(p)$ έχει δύο <u>μιγαδικές συζυγείς ρίζες</u> $u \pm iv$, τότε οι $e^{(u+iv)t}$, $e^{(u-iv)t}$ είναι γραμμ. ανεξάρτητες τόπότε και οι

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}\left\{e^{(u+iv)t} + e^{(u-iv)t}\right\} = \frac{1}{2} e^{ut}\left\{e^{ivt} + e^{-ivt}\right\}$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2i}\left\{e^{(u+iv)t} - e^{(u-iv)t}\right\} = \frac{1}{2i} e^{ut}\left\{e^{ivt} - e^{-ivt}\right\}$$

είναι γραμμ. ανεξάρτητες. (Γιατί;) . Όμως $e^{ivt} = \text{συν}\,vt + i\,\text{ημ}\,vt$

$e^{-ivt} = \text{συν}\,vt - i\,\text{ημ}\,vt$

Άρα $\varphi_1(t) = \frac{1}{2} e^{ut} \cdot 2\,\text{συν}\,vt = e^{ut} \cdot \text{συν}\,vt$

$\varphi_2(t) = \frac{1}{2i} e^{ut} \cdot 2 \cdot i\,\text{ημ}\,vt = e^{ut}\,\text{ημ}\,vt$

και η γενική λύση της $L(y) = 0$ είναι:

$$\boxed{y(t) = e^{ut}\left(c_1\,\text{συν}\,vt + c_2\,\text{ημ}\,vt\right)}$$

Παραδείγματα - Εφαρμογές

1) $y''-y'-2y=0$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P(\rho)$ είναι $\rho^2-\rho-2$ με ρίζες $\rho_1=-1$, $\rho_2=2$, δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, άρα η γενική λύση είναι: $y(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{2t}$

2) $y''+4y'+4y=0$. $P(\rho)=\rho^2+4\rho+4=(\rho+2)^2$, $\rho=-2$ διπλή ρίζα, άρα $y(t)=c_1e^{-2t}+c_2t\,e^{-2t}$

3) $y''-2y'+5y=0$. $P(\rho)=\rho^2-2\rho+5$, $\rho_1=1+2i$, $\rho_2=1-2i$
$u=1$, $v=2$ άρα $y(t)=e^{t}(c_1\,\eta\mu 2t+c_2\,\sigma\upsilon\nu 2t)$

4) $y''-2y'-3y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=4$

$P(\rho)=\rho^2-2\rho-3$, $\rho_1=3$. $\rho_2=-1$ άρα $y(t)=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}$

$$\left.\begin{aligned} y(0)&=c_1+c_2=0\\ y'(0)&=3c_1-c_2=4\end{aligned}\right\}\Rightarrow c_1=1,\ c_2=-1 \quad \text{άρα} \quad y(t)=e^{3t}-e^{-t}.$$

5) $y''+\frac{k}{m}y(t)=0$, $k\neq 0$ (Απλός Αρμονικός Ταλαντωτής).

$P(\rho)=\rho^2+\frac{k}{m}$, $\rho_1=i\sqrt{\frac{k}{m}}$, $\rho_2=-i\sqrt{\frac{k}{m}}$, $u=0$, $v=\sqrt{\frac{k}{m}}$,

άρα $y(t)=c_1\,\sigma\upsilon\nu\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t+c_2\,\eta\mu\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t$. $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$, $A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$

Η $y(t)$ γράφεται: $y(t)=A\,\eta\mu(\omega t+\varphi)$

6) $y''(t) + \frac{b}{m} y'(t) + \frac{k}{m} y(t) = 0 \quad (6)$.

(*) $\frac{b^2}{m^2} - \frac{4k}{m} < 0$ (Φθίνουσα Ταλάντωση)

$P(\rho) = \rho^2 + \frac{b}{m}\rho + \frac{k}{m}$. Λόγω της (*) το P έχει δύο μιγαδικές ρίζες.

$$\rho_1 = \frac{-\frac{b}{m} + i\sqrt{\frac{4k}{m} - \frac{b^2}{m^2}}}{2} = -\frac{b}{2m} + i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$\rho_2 = \frac{-\frac{b}{m} - i\sqrt{\frac{4k}{m} - \frac{b^2}{m^2}}}{2} = -\frac{b}{2m} - i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$u = -\frac{b}{2m}$, $v = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ και η γενική λύση της (6) είναι:

$y(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}\left(c_1 \text{συν}\omega t + c_2 \text{ημ}\omega t\right)$ όπου $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$

ή $y(t) = A e^{-\frac{b}{2m}t} \text{ημ}(\omega t + \varphi)$

7) $y''(t) + \frac{b}{m} y'(t) + \frac{k}{m} y(t) = 0 \quad (7)$

(**) $\frac{b^2}{m^2} - \frac{4k}{m} > 0$ (Μη Περιοδική)

$\rho_1 = -\frac{b}{2m} + \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$, $\rho_2 = -\frac{b}{2m} - \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$ πραγματικές

λόγω της (**). Άρα $y(t) = c_1 e^{\rho_1 t} + c_2 e^{\rho_2 t} = e^{-\frac{b}{2m}t}\left(c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}\right)$

όπου $\omega = \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$

Ασκήσεις

1. Βρείτε την γενική λύση των:

α) $y'' + 3y' - 10y = 0$ β) $y'' + 5y' + 6y = 0$ γ) $y'' + 6y' + 9y = 0$

δ) $y'' + 2y' + y = 0$ ε) $y'' + 5y = 0$

2. Να λυθούν τα Π.Α.Τ. :

α) $y'' - y' - 6y = 0 \quad , \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 5$

β) $y'' + 2y' + y = 0 \quad , \quad y(0) = 3 \ , \ y'(0) = 1$

3. Να λυθεί το σύστημα Δ.Ε. : $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 4x \\ \dfrac{dx}{dt} = -y \end{cases}$

IV. ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ Γ.Δ.Ε. - με σταθερούς συντελεστές

Η μη ομογενής γ.δ.ε. 2ης τάξης είναι της μορφής:

$$L(y) = y'' + \alpha y' + by = B(t) \qquad (1)$$

όπου $B(\cdot)$ συνεχής στο I.

As υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε μία <u>μερική λύση $y_\mu(\cdot)$</u> της (1). Τότε, αν y μια οποιαδήποτε άλλη λύση της (1), η $y-y_\mu$ είναι λύση της $L(y)=0$, δηλαδή της ομογενούς Δ.Ε. που αντιστοιχεί στην (1).

Γιατί $\quad L(y-y_\mu) = L(y) - L(y_\mu) = B(t) - B(t) = 0$.

Άρα, αν y_1, y_2 δύο γραμμ. ανεξάρτητες λύσεις της $L(y)=0$ υπάρχουν μοναδικά c_1, c_2 τέτοια ώστε $y-y_\mu = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

Κάθε λύση λοιπόν της (1) μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$y = y_\mu + c_1 y_1 + c_2 y_2$$

οπότε το <u>πρόβλημα της επίλυσης της (1)</u> <u>ανάγεται</u> στην εύρεση μιάς <u>μερικής λύσης της (1)</u>.

1. Μεταβολή των Παραμέτρων

Αναζητούμε μερική λύση της (1) της μορφής $u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$. Δηλαδή τον ρόλο των παραμέτρων c_1, c_2, παίζουν τώρα οι συναρτήσεις $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$. Αν λοιπόν η $y = u_1 \cdot y_1 + u_2 y_2$ είναι λύση της (1), τότε:

$$(u_1 y_1 + u_2 y_2)'' + \alpha (u_1 y_1 + u_2 y_2)' + b(u_1 y_1 + u_2 y_2) =$$
$$= u_1 L(y_1) + u_2 \cdot L(y_2) + (y_1 \cdot u_1'' + y_2 u_2'') + 2(u_1' y_1' + u_2' y_2') + \alpha (y_1 u_1' + y_2 u_2') = B$$

όμως $L(y_1) = L(y_2) = 0$, οπότε:

$$(y_1 u_1'' + y_2 u_2'') + 2(y_1' u_1' + y_2' u_2') + b(y_1 u_1' + y_2 u_2') = B \qquad (2)$$

(Προσέξτε ότι το B δηλώνει συνάρτηση)

Αν $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$ (3) , τότε :

$$(y_1u_1' + y_2u_2')' = (y_1'u_1' + y_2'u_2') + (y_1u_1'' + y_2u_2'') = 0$$

και πρέπει (σύμφωνα με την (2)) , $y_1'u_1' + y_2'u_2' = B$ (4)

Άρα, σκεπτόμενοι αντίστροφα , αν βρούμε $u_1(\cdot), u_2(\cdot)$ που να ικανοποιεί τις (3),(4) τότε $L(u_1y_1 + u_2y_2) = B$, δηλαδή η $y = u_1y_1 + u_2y_2$ είναι λύση της (1).

Οι εξισώσεις (3),(4) είναι δύο γραμμικές εξισώσεις για τις u_1', u_2' με ορίζουσα την $W(y_1, y_2)$ και εφ' όσον οι y_1, y_2 είναι γραμμ. ανεξάρτητες, $W(y_1,y_2) \neq 0$ (στο I) . Άρα υπάρχουν μοναδικές λύσεις u_1', u_2' :

$$u_1' = \frac{-y_2 \cdot B}{W(y_1,y_2)} \quad , \quad u_2' = \frac{y_1 \cdot B}{W(y_1,y_2)}$$

οπότε $u_1(t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{y_2(s)B(s)}{W(y_1,y_2)(s)} ds$, $u_2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s)B(s)}{W(y_1,y_2)(s)} ds$

Η λύση $y_\mu = u_1y_1 + u_2y_2$ τότε είναι:

$$y_\mu(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{[y_1(s)y_2(t) - y_1(t)y_2(s)] \cdot B(s)}{W(y_1,y_2)(s)} ds \qquad (5)$$

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $B(\cdot)$ συνεχής στο I. Τότε κάθε λύση y της $L(y)=B$ γράφεται $y = y_\mu + c_1y_1 + c_2y_2$ όπου y_μ μιά μερική λύση της $L(y)=B$ και y_1, y_2 γραμμ. ανεξάρτητες λύσεις της $L(y)=0$, c_1, c_2 σταθερές.

Μιά μερική λύση της $L(y)=B$ δίνεται από την (5).

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω $L(y)=B$ και το $P(\rho)=\rho^2+\alpha\rho+b$ έχει δύο πραγματικές ρίζες ρ_1, ρ_2. Εχουμε $y_1(t)=e^{\rho_1 t}$, $y_2(t)=e^{\rho_2 t}$. Τότε:

$$W(y_1,y_2)(t)=\begin{vmatrix} e^{\rho_1 t} & e^{\rho_2 t} \\ \rho_1 e^{\rho_1 t} & \rho_2 e^{\rho_2 t} \end{vmatrix} = \rho_2 e^{(\rho_1+\rho_2)t}-\rho_1 e^{(\rho_1+\rho_2)t} = (\rho_2-\rho_1)\, e^{(\rho_1+\rho_2)t}$$

Άρα $W(y_1,y_2)(t)\neq 0 \quad \forall\, t$

Επίσης $\quad y_1(s)y_2(t)-y_1(t)y_2(s) = e^{\rho_1 s}e^{\rho_2 t}-e^{\rho_1 t}e^{\rho_2 s}$

Άρα μιά μερική λύση (σύμφωνα με την (5)) είναι:

$$y_\mu(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{e^{\rho_1 s}e^{\rho_2 t}-e^{\rho_1 t}e^{\rho_2 s}}{(\rho_2-\rho_1)\,e^{(\rho_1+\rho_2)s}}B(s)\,ds = \frac{1}{\rho_2-\rho_1}\int_{t_0}^{t}\left\{e^{\rho_2(t-s)}-e^{\rho_1(t-s)}\right\}B(s)\,ds$$

και η γενική λύση της $L(y)=B$ με $\rho_1\neq\rho_2$, $\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}$ είναι:

$$y(t)=c_1e^{\rho_1 t}+c_2e^{\rho_2 t}+\frac{1}{\rho_2-\rho_1}\int_{t_0}^{t}\left\{e^{\rho_2(t-s)}-e^{\rho_1(t-s)}\right\}B(s)\,ds$$

<u>Παράδειγμα:</u> $y''-y'-2y=e^{-t}$. Έχουμε $\rho_1=-1$, $\rho_2=2$, $B(t)=e^{-t}$

$$\int_{t_0}^{t}\left\{e^{2(t-s)}-e^{s-t}\right\}e^{-s}\,ds = \int_{t_0}^{t}e^{2t-3s}\,ds-\int_{t_0}^{t}e^{-t}\,ds =$$

$$=e^{2t}\int_{t_0}^{t}e^{-3s}\,ds-e^{-t}(t-t_0) = e^{2t}\left[-\tfrac{1}{3}e^{-3s}\right]_{t_0}^{t}+e^{-t}(t_0-t)$$

$$=e^{2t}\left(-\tfrac{1}{3}e^{-3t}+\tfrac{1}{3}e^{-3t_0}\right)+e^{-t}(t_0-t) = -\tfrac{1}{3}e^{-t}+\tfrac{1}{3}e^{-3t_0}e^{2t}+t_0e^{-t}-te^{-t}$$

$$=\bar{c}_3e^{-t}+\bar{c}_4e^{2t}-te^{-t}$$

Εφ' όσον $\dfrac{1}{\rho_2-\rho_1}=\dfrac{1}{3}$ έχουμε:

$$y_\mu(t)=\tfrac{1}{3}\left(\bar{c}_3e^{-t}+\bar{c}_4e^{2t}-te^{-t}\right)$$

Άρα $\quad y(t)=\bar{c}_1 e^{-t}+\bar{c}_2 e^{2t}+\frac{1}{3}\bar{c}_3 e^{-t}+\frac{1}{3}\bar{c}_4 e^{2t}-\frac{1}{3}t e^{-t}$

ή (αλλάζοντας τις σταθερές) : $\quad y(t)=c_1 e^{-t}+c_2 e^{2t}-\frac{1}{3}t e^{-t}$

<u>Παράδειγμα</u>: $L(y)=B$ και το $P(p)$ έχει διπλή ρίζα.

Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς $L(y)=0$ είναι οι $y_1(t)=t e^{pt}$, $y_2(t)=e^{pt}$

$$W(y_1,y_2)(t)=\begin{vmatrix} t e^{pt} & e^{pt} \\ e^{pt}+te^{pt}p & p e^{pt} \end{vmatrix} = pt e^{2pt}-e^{2pt}-pt e^{2pt}=-e^{2pt}\neq 0$$

Άρα $\quad y_\mu(t)=\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{-te^{pt}e^{ps}+se^{ps}e^{pt}}{-e^{2ps}}B(s)ds=\int_{t_0}^{t}\left(t e^{p(t-s)}-s e^{p(t-s)}\right)B(s)ds$

$\Rightarrow \quad y_\mu(t)=\displaystyle\int_{t_0}^{t}(t-s)\, e^{p(t-s)}\cdot B(s)ds$. Συνεπώς η γενική λύση είναι:

$$y(t)=c_1\cdot t e^{pt}+c_2 e^{pt}+\int_{t_0}^{t}(t-s)\, e^{p(t-s)}\cdot B(s)ds$$

<u>Παράδειγμα</u>: $L(y)=B$ και $P(p)$ έχει δύο μιγαδικές ρίζες, $u\pm iv$ με $u=-\frac{\alpha}{2}$, $v=\sqrt{b-\frac{\alpha^2}{4}}$.

Οι $y_1(t)=e^{ut}\eta\mu vt$, $y_2(t)=e^{ut}\sigma\upsilon\nu vt$ είναι γραμμ. ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς $L(y)=0$.

$$W(y_1,y_2)(t)=\begin{vmatrix} e^{ut}\eta\mu vt & e^{ut}\sigma\upsilon\nu vt \\ ue^{ut}\eta\mu vt+e^{ut}v\sigma\upsilon\nu vt & ue^{ut}\sigma\upsilon\nu vt-e^{ut}v\eta\mu vt \end{vmatrix}=-v e^{2ut}$$

$$y_\mu(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{e^{us}\eta\mu\upsilon s\, e^{ut}\sigma\upsilon\nu\upsilon t - e^{ut}\eta\mu\upsilon t\, e^{us}\sigma\upsilon\nu\upsilon s}{-e^{2us}\cdot\upsilon} B(s)\,ds$$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{e^{u(t-s)}\sigma\upsilon\nu\upsilon s\,\eta\mu\upsilon t - e^{u(t-s)}\eta\mu\upsilon s\,\sigma\upsilon\nu\upsilon t}{\upsilon} B(s)\,ds$$

$$= \frac{1}{\upsilon}\int_{t_0}^{t} e^{u(t-s)}\eta\mu\upsilon(t-s)\,B(s)\,ds$$

, και η γενική λύση είναι:

$$y(t) = c_1 e^{ut}\eta\mu\upsilon t + c_2 e^{ut}\sigma\upsilon\nu\upsilon t + \frac{1}{\upsilon}\int_{t_0}^{t} e^{u(t-s)}\eta\mu\upsilon(t-s)B(s)\,ds .$$

<u>Παράδειγμα:</u> $y'' + 4y = \sigma\upsilon\nu t$

$P(\rho) = \rho^2 + 4$, $\rho = \pm 2i$, $u = 0,\ \upsilon = 2$, $B(t) = \sigma\upsilon\nu t$

$$y_\mu(t) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \eta\mu 2(t-s)\,\sigma\upsilon\nu s\,ds = \frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu t + \bar{c}_1\sigma\upsilon\nu 2t + \bar{c}_2\eta\mu 2t$$

και η γενική $y(t) = c_1\sigma\upsilon\nu 2t + c_2\eta\mu 2t + \frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu t$

Η μέθοδος που περιγράψαμε, αν και είναι η πλέον γενική δεν είναι η απλούστερη. Σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να βρούμε μιά μερική λύση της $L(y) = B$ πολύ ευκολότερα όταν η $B(\cdot)$ είναι ειδικής μορφής.

2. Μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών

Η μέθοδος αυτή αφορά την εύρεση μερικής λύσης μιας μη ομογενούς Δ.Ε. (με σταθερούς συντελεστές) όταν η $B(\cdot)$ είναι της μορφής:

$B(t)$: πολυωνυμική, ημkt, συνkt, e^{kt}

ή γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω.

Ορίζουμε ως γενική μορφή της t^ν την $\beta_\nu t^\nu + \beta_{\nu-1} t^{\nu-1} + \dots + \beta_1 t + \beta_0$ της e^{kt} την βe^{kt}, της ημkt την β_1ημ$kt + \beta_2$συνkt και της συνkt την β_1ημ$kt + \beta_2$συνkt.

$B(t)$	Γενική μορφή
t^2	$\beta_1 t^2 + \beta_2 t + \beta_3$
t	$\beta_1 t + \beta_2$
e^{kt}	βe^{kt}
ημkt	β_1ημ$kt + \beta_2$συνkt
συνkt	β_1ημ$kt + \beta_2$συνkt

Η μέθοδος εύρεσης μιάς μερικής λύσης βασίζεται στην αναζήτηση συνάρτησης της γενικής μορφής της $B(t)$ που να είναι λύση της $L(y) = B$ προσδιορίζοντας τους συντελεστές που εμφανίζονται στην γενική μορφή.

<u>Παράδειγμα</u>: $y'' + 3y' + 2y = t^2 \qquad (1)$

Η γενική μορφή της t^2 είναι $\beta_1 t^2 + \beta_2 t + \beta_3$. Αναζητούμε λύση της (1) αυτής της μορφής.

$$(\beta_1 t^2 + \beta_2 t + \beta_3)'' + 3(\beta_1 t^2 + \beta_2 t + \beta_3)' + 2(\beta_1 t^2 + \beta_2 t + \beta_3) = t^2$$

$$2\beta_1 + 6\beta_1 t + 3\beta_2 + 2\beta_1 t^2 + 2\beta_2 t + 2\beta_3 = t^2$$

$$t^2(2\beta_1 - 1) + t(6\beta_1 + 2\beta_2) + 2\beta_1 + 2\beta_3 + 3\beta_2 = 0 \quad \forall\, t \in I$$

Άρα
$$\left.\begin{array}{r} 2\beta_1 - 1 = 0 \\ 6\beta_1 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\beta_1 + 2\beta_3 + 3\beta_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \beta_1 = \frac{1}{2} \\ \beta_2 = -\frac{3}{2} \\ \beta_3 = \frac{7}{4} \end{array}$$

Η $y_\mu(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{7}{4}$ είναι μιά μερική λύση της (1)

οπότε η γενική λύση (εφ' όσον $P(\rho) = \rho^2 + 3\rho + 2$, $\rho_1 = -1$, $\rho_2 = -2$)

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{7}{4}$$

<u>Παράδειγμα</u>: $y'' - 2y' + y = \text{συν}t$ (2)

Η γενική μορφή της συνt είναι $\beta_1 \text{ημ}t + \beta_2 \text{συν}t$

$$(\beta_1 \text{ημ}t + \beta_2 \text{συν}t)'' - 2(\beta_1 \text{ημ}t + \beta_2 \text{συν}t)' + (\beta_1 \text{ημ}t + \beta_2 \text{συν}t) = \text{συν}t$$

$$-2\beta_1 \text{συν}t + 2\beta_2 \text{ημ}t = \text{συν}t \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} -2\beta_1 = 1 \\ \beta_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \beta_1 = -\frac{1}{2} \\ \beta_2 = 0 \end{array}\right\}$$

Άρα $y_\mu(t) = -\frac{1}{2}\text{ημ}t$. Το $P(\rho) = \rho^2 - 2\rho + 1$, $\rho = 1$ διπλή ρίζα.

Η γενική λύση είναι: $y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t - \frac{1}{2}\text{ημ}t$

Θεώρημα: Αν y_1 είναι λύση της $L(y) = B_1$ και y_2 λύση της $L(y) = B_2$ τότε η $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ είναι λύση της $L(y) = c_1 B_1 + c_2 B_2$

Απόδειξη: Άσκηση.

<u>Παράδειγμα:</u> $y''+4y = 10e^t + 8t^2 \qquad (3)$

Σ' αυτή την περίπτωση, η γενική μορφή με βάση την οποία προσπαθούμε να προσδιορίσουμε μιά μερική λύση είναι το άθροισμα των γενικών μορφών των συναρτήσεων που παρουσιάζονται ως $B(t)$. (Σύμφωνα με το θεώρημα είναι γραμμικός συνδυασμός των γενικών μορφών, αλλά οι συντελεστές είναι έτσι κι αλλιώς προσδιοριστέοι.)

Η γενική μορφή της $10e^t + 8t^2$ είναι $\beta_1 e^t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t + \beta_4$

$$(\beta_1 e^t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t + \beta_4)'' + 4(\beta_1 e^t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t + \beta_4) = 10e^t + 8t^2$$

$$5\beta_1 e^t + 4\beta_2 t^2 + 4\beta_3 t + 2\beta_2 + 4\beta_4 = 10e^t + 8t^2 \qquad \forall t$$

$$\left.\begin{array}{r} 5\beta_1 = 10 \\ 2\beta_2 + 4\beta_4 = 0 \\ 4\beta_2 = 8 \\ 4\beta_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta_1 = 2 \\ \beta_4 = -1 \\ \beta_2 = 2 \\ \beta_3 = 0 \end{array}\right.$$

Άρα μιά μερική λύση είναι $\qquad y_\mu(t) = 2e^t + 2t^2 - 1$

$P(\rho) = \rho^2 + 4 \Rightarrow \rho = \pm 2i \qquad u = 0,\ v = 2 \qquad$ και η γενική λύση είναι:

$$y(t) = c_1 \eta\mu 2t + c_2 \sigma\upsilon\nu 2t + 2e^t + 2t^2 - 1$$

Υπάρχει το ενδεχόμενο η μέθοδος που περιγράψαμε να μην οδηγεί σε προσδιορισμό συντελεστών. Αυτό συμβαίνει όταν η συνάρτηση $B(\cdot)$ της μη ομογενούς $L(y) = B$ είναι η ίδια λύση της ομογενούς $L(y) = 0$.

<u>Παράδειγμα:</u> $y''+2y'-3y=e^t$ (4).

Η γενική μορφή της e^t είναι βe^t.

$(\beta e^t)''+2(\beta e^t)'-3\beta e^t=e^t \Rightarrow \beta e^t+2\beta e^t-3\beta e^t=e^t \Rightarrow 0\cdot e^t=e^t$

δεν υπάρχει β που να κάνει την βe^t λύση της (4).

Σ' αυτή την περίπτωση, δηλαδή αν η $B(\cdot)$ είναι λύση της $L(y)=0$ αναζητούμε μερική λύση της μορφής $t\cdot g(t)$ όπου $g(t)$ η γενική μορφή της $B(t)$.

Για την (4) $t\,g(t)=t\beta e^t$

$(t\beta e^t)''+2(\beta t e^t)'-3(\beta t e^t)=e^t$

$\beta(t+2)e^t+2\beta(t+1)e^t-3\beta t e^t=e^t \Rightarrow 4\beta e^t=e^t \Rightarrow 4\beta=1 \Rightarrow \beta=\frac{1}{4}$

Άρα $y_\mu(t)=\frac{1}{4}te^t$ και η γενική λύση ($\rho_1=-3, \rho_2=1$)

$$y(t)=c_1e^{-3t}+c_2e^t+\frac{1}{4}te^t$$

<u>Παράδειγμα:</u> $y''+y=\eta\mu t$. Η $\eta\mu t$ είναι λύση της $L(y)=0$ άρα αναζητούμε μερική λύση της μορφής: $t(\beta_1\eta\mu t+\beta_2\sigma\upsilon\nu t)$

$[t(\beta_1\eta\mu t+\beta_2\sigma\upsilon\nu t)]''+t(\beta_1\eta\mu t+\beta_2\sigma\upsilon\nu t)=\eta\mu t$

$-2\beta_2\eta\mu t+2\beta_1\sigma\upsilon\nu t=\eta\mu t \Rightarrow \beta_1=0, \beta_2=-\frac{1}{2}$

Άρα $y_\mu(t)=-\frac{1}{2}t\,\sigma\upsilon\nu t$ και $y(t)=c_1\eta\mu t+c_2\sigma\upsilon\nu t-\frac{1}{2}t\,\sigma\upsilon\nu t$

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η γενική λύση:

α) $y'' - 4y = 4t$ β) $y'' + 9y = συν3t$ γ) $y'' + 5y' + 6y = 3e^{-3t}$

2. Να βρεθεί η γενική λύση:

α) $y'' + 2y' + y = 3e^{t} + t^{2}$ β) $y'' - 2y' + y = 2συν2t + ημ2t + 2e^{-t}$

3. Να λυθούν τα Π.Α.Τ. :

α) $y'' - 2y' - 3y = 2e^{t} - 10ημt$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$

β) $y' + 3y = 5e^{2t}$, $y(0) = 7$

<u>Εφαρμογή</u>: Εξαναγκασμένη Ταλάντωση

$$y'' + \frac{b}{m} y' + \frac{K}{m} y = \frac{F_m}{m}\, ημ ω_o t \qquad (5)$$

Αναζητούμε λύση της μορφής : $β_1 ημ ω_o t + β_2 συν ω_o t$
Θέτοντας την μορφή αυτή στην (5) και χρησιμοποιώντας την γραμμική ανεξαρτησία των $ημω_o t$, $συνω_o t$ έχουμε:

$$\begin{aligned} β_1 (ω^2 - ω_o^2) K - β_2 b ω_o ω^2 &= F_m ω^2 \qquad \text{όπου} \quad ω = \sqrt{\frac{K}{m}} \\ β_1 \cdot b ω_o ω^2 + β_2 K (ω^2 - ω_o^2) &= 0 \end{aligned}$$

και συνεπώς : $β_1 = \dfrac{K F_m ω^2 (ω^2 - ω_o^2)}{K^2 (ω^2 - ω_o^2)^2 + b^2 ω_o^2 ω^4}$, $β_2 = \dfrac{-F_m ω^4 b ω_o}{K^2 (ω^2 - ω_o^2)^2 + b^2 ω_o^2 ω^4}$

Η $y_μ(t) = β_1 ημ ω_o t + β_2 συν ω_o t$ γράφεται

$$y_μ(t) = \frac{F_m}{\sqrt{(ω^2 - ω_o^2)^2 m^2 + b^2 ω_o^2}}\, ημ(ω_o t - δ)$$

όπου $δ$ προσδιορίσιμη γωνία.

Αν $ω_1 = \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}}$ τότε η γενική λύση της (5) είναι:

$$y(t) = e^{-\frac{b}{2m} t} \left(c_1 συν ω_1 t + c_2 ημ ω_1 t \right) + \frac{F_m}{\sqrt{(ω^2 - ω_o^2)^2 m^2 + b^2 ω_o^2}}\, ημ(ω_o t - δ)$$

V. ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ Δ.Ε. ν-τάξης (με σταθερούς συντελεστές)

Κατά αναλογία με τις ομογενείς διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης είναι δ.ε. της μορφής:

$$L(y) = y^{(\nu)} + \alpha_1 y^{(\nu-1)} + \alpha_2 y^{(\nu-2)} + \dots + \alpha_{\nu-1} y' + \alpha_\nu y = 0 \qquad (1)$$

Ορίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $P(p) = p^{\nu} + \alpha_1 p^{\nu-1} + \alpha_2 p^{\nu-2} + \dots + \alpha_{\nu-1} p + \alpha_\nu$

Αν p ρίζα του $P(\cdot)$ τότε προφανώς $L(e^{pt}) = 0$ άρα e^{pt} λύση της $L(y)=0$ γιατί $L(e^{pt}) = P(p)\, e^{pt}$ (2)

Έστω p ρίζα του P πολλαπλότητας m, δηλαδή $P(p) = P'(p) = \dots = P^{(m-1)}(p) = 0$. Τότε παραγωγίζοντας την (2) διαδοχικά κ φορές (ως προς p) και παρατηρώντας ότι $\frac{\partial}{\partial p}(L(e^{pt})) = L\left(\frac{\partial}{\partial p} e^{pt}\right)$, (γιατί η e^{pt} έχει συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε τάξης), έχουμε:

$$\frac{\partial^\kappa}{\partial p^\kappa} P(p)\, e^{pt} = \frac{\partial^\kappa}{\partial p^\kappa}(L(e^{pt})) = L\left(\frac{\partial^\kappa e^{pt}}{\partial p^\kappa}\right) = L(t^\kappa e^{pt}) \qquad (3)$$

Από τον τύπο του Leibnitz για παράγωγο κ-τάξεως γινομένου συναρτήσεων, $(f \cdot g)^{(\kappa)} = \sum_{i=0}^{\kappa} \binom{\kappa}{i} f^{(\kappa-i)} \cdot g^{(i)}$ έχουμε:

$$(4) \quad \frac{\partial^\kappa}{\partial p^\kappa} P(p)\, e^{pt} = \left[P^{(\kappa)}(p) + \kappa P^{(\kappa-1)}(p)\, t + \frac{\kappa(\kappa-1)}{2!} P^{(\kappa-2)}(p)\, t^2 + \dots + P(p)\, t^\kappa\right] e^{pt}$$

Για $\kappa = 0,1,2,\dots,m-1$ οι (3),(4) δίνουν $L(t^\kappa e^{pt}) = 0$, δηλαδή η $t^\kappa e^{pt}$ για $\kappa = 0,1,2,\dots,m-1$ είναι λύση της $L(y)=0$.

Η προηγούμενη ανάλυση οδηγεί αμέσως στο ακόλουθο:

<u>Θεώρημα</u>: Αν $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\lambda$ οι διακεκριμένες ρίζες του $P(\cdot)$ με πολλαπλότητες $m_1, m_2, \dots, m_\lambda$ η κάθε μιά (δηλ. $m_1+m_2+\dots+m_\lambda=\nu$) τότε οι συναρτήσεις $e^{\rho_1 t}, te^{\rho_1 t}, t^2e^{\rho_1 t}, \dots, t^{m_1-1}e^{\rho_1 t}, e^{\rho_2 t}, te^{\rho_2 t}, t^2e^{\rho_2 t}, \dots, t^{m_2-1}e^{\rho_2 t}, \dots\dots, e^{\rho_\lambda t}, te^{\rho_\lambda t}, \dots, t^{m_\lambda-1}e^{\rho_\lambda t}$. είναι λύσεις της (1).

Αποδεικνύεται ότι:

- οι λύσεις που δίνονται στο προηγούμενο θεώρημα είναι γραμμικά ανεξάρτητ[ες]
- αν $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ αυτές οι λύσεις , τότε (λόγω της γραμμικής ανεξαρτησία[ς]) κάθε λύση της (1) είναι της μορφής: $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_\nu y_\nu$

Μπορούμε να ελέγξουμε την γραμμική ανεξαρτησία ν συναρτήσεων (στην προκειμένη περίπτωση ν λύσεων) με την Wronskian :

$$W(y_1, y_2, \dots, y_\nu)(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_\nu \\ y_1' & y_2' & \dots & y_\nu' \\ y_1'' & y_2'' & & y_\nu'' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(\nu-1)} & y_2^{(\nu-1)} & \dots & y_\nu^{(\nu-1)} \end{vmatrix} (t)$$

Οι $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν και μόνον αν $W(y_1, y_2, \dots, y_\nu)(t) \neq 0$ για κάθε $t \in I$.

■ Το Π.Α.Τ. ν-τάξης περιλαμβάνει εκτός από την $L(y)=0$ ν-αρχικές συνθήκες $y(t_0)=y_0,\ y'(t_0)=y_1,\ y''(t_0)=y_2, \dots, y^{(\nu-1)}(t_0)=y_{\nu-1}$

<u>Παράδειγμα</u>: $y''' - 3y' + 2y = 0$

$$P(\rho) = \rho^3 - 3\rho + 2 = (\rho-1)^2(\rho+2)$$

Οι τρείς γραμμ. ανεξάρτητες λύσεις είναι: e^t, te^t, e^{-2t}
οπότε η γενική λύση της δ.ε. είναι: $y(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-2t}$

<u>Παράδειγμα</u>: $y''' - 5y'' + 6y' = 0$, $P(\rho) = \rho^3 - 5\rho^2 + 6\rho = \rho(\rho-2)(\rho-3)$

$$y(t) = c_1 + c_2e^{2t} + c_3e^{3t}$$

<u>Παράδειγμα:</u> $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

$P(\rho) = \rho^3 - 3\rho^2 + 3\rho - 1 = (\rho-1)^3$

Οι e^t, te^t, t^2e^t οι τρεις γραμμ. ανεξάρτητες λύσεις

Η γενική λύση είναι: $y(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t$

Ασκήσεις

1. Να λυθούν : α) $y''' - 4y' = 0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=0$ β) $y^{(5)} - y^{(4)} - y' + y = 0$, $y(0)=1$, $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{(4)}(0) = 0$

γ) $y''' - 8y = 0$ δ) $y^{(100)} + 100y = 0$ ε) $y^{(4)} - 16y = 0$

VI. ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ Δ.Ε. ν-τάξης (με σταθερούς συντελεστές)

Είναι διαφορικές εξισώσεις της μορφής:

$$L(y) = y^{(\nu)} + \alpha_1 y^{(\nu-1)} + \alpha_2 y^{(\nu-2)} + \cdots + \alpha_{\nu-1} y' + \alpha_\nu y = B \qquad (1)$$

(Η B είναι συνάρτηση).

Ισχύουν, γενικά, όλα όσα ισχύουν για τις μη ομογενείς 2ης τάξης. Για να αποφύγουμε τον περίπλοκο συμβολισμό θα περιγράψουμε την εφαρμογή της μεθόδου της μεταβολής των παραμέτρων σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα:

$$\tilde{L}(y) = y''' + y'' + y' + y = 1$$

Η αντίστοιχη ομογενής είναι: $\tilde{L}(y) = 0$ με $P(p) = p^3 + p^2 + p + 1$
$P(p) = (p+1)(p-i)(p+i)$ και οι τρεις γραμμ. ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς οι $y_1(t) = e^{-t}$, $y_2(t) = \text{συν}t$, $y_3(t) = \text{ημ}t$.

Για να προσδιορίσουμε μία μερική λύση της $\tilde{L}(y) = 1$, $y_\mu(\cdot)$ θεωρούμε την μορφή $u_1(t)e^{-t} + u_2(t)\,\text{συν}t + u_3(t)\,\text{ημ}t$ και αναζητούμε λύση αυτής της μορφής. Προκύπτει ότι πρέπει να λύσουμε* (για τον προσδιορισμό των u_1', u_2', u_3', άρα και των u_1, u_2, u_3) ως προς u_1', u_2', u_3' το σύστημα:

$$\begin{aligned} u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_3' y_3 &= 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_3' y_3' &= 0 \\ u_1' y_1'' + u_2' y_2'' + u_3' y_3'' &= 1 \end{aligned}$$

(* ανατρέξτε στην λύση της μη ομογενούς 2ης τάξης)

που στην προκειμένη περίπτωση είναι:

$$\begin{aligned} e^{-t} u_1' + \text{συν}t\, u_2' + \text{ημ}t\, u_3' &= 0 \\ -e^{-t} u_1' + (-\text{ημ}t)\, u_2' + \text{συν}t\, u_3' &= 0 \\ e^{-t} u_1' + (-\text{συν}t)\, u_2' + (-\text{ημ}t)\, u_3' &= 1 \end{aligned}$$

Η ορίζουσα των συντελεστών είναι:

$$W(y_1,y_2,y_3)(t) = \begin{vmatrix} e^{-t} & συνt & ημt \\ -e^{-t} & -ημt & συνt \\ e^{-t} & -συνt & -ημt \end{vmatrix} = 2e^{-t}$$

Λύνοντας ως προς u_1', u_2', u_3' έχουμε:

$$u_1'(t) = \frac{1}{2}e^{t}\begin{vmatrix} 0 & συνt & ημt \\ 0 & -ημt & συνt \\ 1 & -συνt & -ημt \end{vmatrix} = \frac{1}{2}e^{t} \quad και \quad u_2'(t) = -\frac{1}{2}(ημt+συνt)$$

$u_3'(t) = \frac{1}{2}(συνt-ημt)$. Άρα $u_1(t) = \frac{1}{2}e^{t}$, $u_2(t) = \frac{1}{2}(συνt-ημt)$

$u_3(t) = \frac{1}{2}(ημt+συνt)$

Μια μερική λύση της $\tilde{L}(y)=1$ είναι:

$$y_\mu(t) = \frac{1}{2}e^{t}e^{-t} + \frac{1}{2}(συνt-ημt)συνt + \frac{1}{2}(ημt+συνt)ημt = 1 \qquad !!$$

(Θα μπορούσαμε να το είχαμε παρατηρήσει από την αρχή !)

Η γενική λύση της $\tilde{L}(y)=1$ είναι: $y(t) = c_1e^{-t} + c_2συνt + c_3ημt + 1$

Το παραπάνω παράδειγμα δείχνει την γενική μέθοδο προσδιορισμού μιας μερικής λύσης. Δεν είναι σε όλες τις περιπτώσεις η ταχύτερη. Μπορούμε, όταν η $B(t)$ είναι της μορφής e^{kt}, πολυώνυμο, ημkt, συνkt ή γραμμ. συνδυασμός των παραπάνω να χρησιμοποιούμε την μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών όπως και για την δ.ε. 2ης τάξης.

<u>Παράδειγμα:</u> $y^{(4)} + 16y = συνt$

Αναζητούμε μερική λύση της γενικής μορφής : $β_1ημt + β_2συνt$

$$(β_1ημt+β_2συνt)^{(4)} + 16(β_1ημt+β_2συνt) = συνt$$

$$β_1ημt + β_2συνt + 16β_1ημt + 16β_2συνt = συνt$$

$β_1 = 0$, $β_2 = \frac{1}{17}$ άρα μία $y_\mu(t) = \frac{1}{17}συνt$

Το $P(p) = p^4 + 16$. Η $p^4 - 16 = 0$ θυμίζουμε ότι είναι της μορφής : $z^\nu - \alpha = 0$ όπου $z, \alpha \in \mathbb{C}$. $\alpha = |\alpha| e^{i\delta}$, $\delta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \delta < 2\pi$

Οι ρίζες της $z^\nu - \alpha = 0$ είναι:

$$z_{\kappa+1} = |\alpha|^{1/\nu} \left\{ \text{συν}\left(\frac{\delta + 2\pi\kappa}{\nu}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{\delta+2\pi\kappa}{\nu}\right) \right\}, \quad \kappa = 0,1,2,\ldots,\nu-1.$$

Άρα $\alpha = -16$, $-16 = |-16| e^{i\delta} = 16 e^{i\delta} = 16(\text{συν}\delta + i\,\text{ημ}\delta)$

$-1 = \text{συν}\delta + i\,\text{ημ}\delta \Rightarrow \delta = \pi$

$$z_1 = 16^{1/4}\left(\text{συν}\frac{\pi}{4} + i\,\text{ημ}\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(1+i)$$

$$z_2 = 16^{1/4}\left(\text{συν}\frac{3\pi}{4} + i\,\text{ημ}\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(-1+i)$$

$z_4 = \sqrt{2}(1-i)$, $z_3 = \sqrt{2}(-1-i)$

Τέσσερες γραμμ. ανεξάρτητες λύσεις είναι οι :

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_1(t) &= e^{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)t} = e^{\sqrt{2}t}(\text{συν}\sqrt{2}t + i\,\text{ημ}\sqrt{2}t) \\
\Phi_2(t) &= e^{\sqrt{2}t}(\text{συν}\sqrt{2}t - i\,\text{ημ}\sqrt{2}t) \\
\Phi_3(t) &= e^{-\sqrt{2}t}(\text{συν}\sqrt{2}t - i\,\text{ημ}\sqrt{2}t) \\
\Phi_4(t) &= e^{-\sqrt{2}t}(\text{συν}\sqrt{2}t + i\,\text{ημ}\sqrt{2}t)
\end{aligned}\right\}$$

άρα και οι $\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2i}$, $\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}$, $\frac{\Phi_3 + \Phi_4}{2}$, $\frac{\Phi_4 - \Phi_3}{2i}$ είναι λύσεις

και γραμμικές ανεξάρτητες . Οπότε οι $y_1(t) = e^{\sqrt{2}t}\text{ημ}\sqrt{2}t$, $y_2(t) = e^{\sqrt{2}t}\text{συν}\sqrt{2}t$, $y_3(t) = e^{-\sqrt{2}t}\text{συν}\sqrt{2}t$, $y_4(t) = e^{-\sqrt{2}t}\text{ημ}\sqrt{2}t$ είναι γραμμ. ανεξάρτητες και η γενική λύση της $y^{(4)} + 16y = \text{συν}t$ είναι:

$$y(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t}\text{ημ}\sqrt{2}t + c_2 e^{\sqrt{2}t}\text{συν}\sqrt{2}t + c_3 e^{-\sqrt{2}t}\text{συν}\sqrt{2}t + c_4 e^{-\sqrt{2}t}\text{ημ}\sqrt{2}t + \frac{1}{17}\text{συν}t$$

Μέθοδος του μηδενιστή

Όπως είδαμε στην περίπτωση της εύρεσης μερικής λύσης της μη ομογενούς 2ης τάξης, η μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων απαιτεί περισσότερους υπολογισμούς από ότι συνήθως χρειάζεται.

Η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών είναι (όταν η $B(t)$ είναι ειδικής μορφής) πολύ ευκολότερη.

Μιά άλλη μέθοδος προσδιορισμού μιάς μερικής λύσης της (1) (σελ. 38) είναι η μέθοδος του μηδενιστή (annihilator). Για να μπορέσουμε να κάνουμε χρήση της μεθόδου αυτής θέτουμε έναν σημαντικό περιορισμό: να είναι η $B(t)$ λύση μιάς ομογενούς δ.ε.

Έστω $L(y) = y^{(\nu)} + \alpha_1 y^{(\nu-1)} + \alpha_2 y^{(\nu-2)} + \cdots + \alpha_{\nu-1} y' + \alpha_\nu y = B$

και η $B(\cdot)$ λύση της ομογενούς μ τάξης $M(\Phi)=0$, δηλαδή $M(B)=0$.

Αν y λύση της $L(y)=B$ τότε $M(L(y)) = M(B) = 0$.

Συνεπώς η y είναι λύση της ομογενούς $\mu+\nu$ τάξης δ.ε.

$$M(L(y)) = 0$$

Άρα η y γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός $\mu+\nu$ γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της $M(L(y))=0$. Όμως <u>δεν</u> είναι λύση της $L(y)=B$ <u>κάθε</u> τέτοιος συνδυασμός. Πρέπει να προσδιορίσουμε τους <u>συντελεστές</u>, θέτοντας την γενική λύση της $M(L(y))=0$ στην $L(y)=B$ και προσδιορίζοντας έτσι τους $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\mu+\nu}$.

Ο τελεστής M που μηδενίζει την B λέγεται μηδενιστής.

<u>Παράδειγμα:</u> $L(y) = y'' - 3y' + 2y = t^2$

Η t^2 είναι λύση της $y'''=0$ άρα $M(y) = y'''$

$M(L(y)) = y^{(5)} - 3y^{(4)} + 2y^{(3)} = M(t^2) = 0$, $P(p) = p^3(p^2-3p+2)$

Η γενική λύση της $M(L(y)) = 0$ είναι:

$$\bar{y}(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2 + \beta_4 e^t + \beta_5 e^{2t}$$

Θέτουμε τώρα την $\bar{y}$ στην $L(y)=B$.

$$(\beta_1+\beta_2 t+\beta_3 t^2+\beta_4 e^t+\beta_5 e^{2t})'' - 3(\beta_1+\beta_2 t+\beta_3 t^2+\beta_4 e^t+\beta_5 e^{2t})'$$

$$+2(\beta_1+\beta_2 t+\beta_3 t^2+\beta_4 e^t+\beta_5 e^{2t}) = t^2 \quad \Rightarrow$$

$$2\beta_3+\beta_4 e^t+4\beta_5 e^{2t}-3\beta_2-6\beta_3 t-3\beta_4 e^t-6\beta_5 e^{2t}+2\beta_1+2\beta_2 t+2\beta_3 t^2+$$
$$+2\beta_4 e^t+2\beta_5 e^{2t} = t^2$$

$$\left.\begin{array}{c} 2\beta_3-3\beta_2+2\beta_1=0 \\ \beta_4-3\beta_4+2\beta_4=0 \\ 4\beta_5+2\beta_5-6\beta_5=0 \\ 6\beta_3+2\beta_2=0 \\ 2\beta_3=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \beta_3=\frac{1}{2} \\ \beta_2=\frac{3}{2} \\ \beta_1=\frac{7}{4} \end{array} \qquad \beta_4, \beta_5 \text{ αυθαίρετα}$$

Εφ' όσον αναζητούμε μερική λύση θέτουμε $\beta_4=\beta_5=0$.
(Γενικά μπορούμε να αγνοούμε στους υπολογισμούς το μέρος της γενικής λύσης της $M(L(y))=0$ που είναι λύση της $L(y)=0$)

Άρα μιά μερική λύση είναι: $y_\mu(t)=\frac{7}{4}+\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}t^2$
Η γενική λύση της $L(y)=0$ είναι $y_{o\mu}(t)=c_1e^t+c_2e^{2t}$
οπότε η γενική λύση της $L(y)=t^2$
είναι: $y(t)=c_1e^t+c_2e^{2t}+\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t+\frac{7}{4}$

<u>Παράδειγμα:</u> $y''+9y =: L(y)=t^2e^{3t}$
(εδώ κάνουμε χρήση του συμβολισμού D, $D^\nu := \frac{d^\nu}{dt^\nu}$

$L(y)=(D^2+9)(y)$. Η t^2e^{3t} είναι λύση (όπως εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε) της $(D-3)^3(y)=0$. Άρα $M(y)=(D-3)^3(y)$ και $M(L(y))=(D-3)^3(D^2+9)(y)=0$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της $M(L(y))=0$ είναι $(\rho-3)^3(\rho^2+9)$ με ρίζες $\rho_1=3$ πολλ. 3
$\rho_2=3i$, $\rho_3=-3i$

Πέντε γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι: $e^{3t}, te^{3t}, t^2e^{3t}$, ημ3t, συν3t

Θέτουμε την $\bar{y}(t) = \beta_1 e^{3t} + \beta_2 t e^{3t} + \beta_3 t^2 e^{3t}$ (αγνοώντας την λύση της ομογενούς) στην $L(y) = B = t^2 e^{3t}$ και έχουμε:

$$9\beta_1 e^{3t} + 3\beta_2 e^{3t} + 3\beta_2 e^{3t} + 9\beta_2 t e^{3t} + 2\beta_3 e^{3t} + 6\beta_3 t e^{3t} + 6t\beta_3 e^{3t} + 9t^2\beta_3 e^{3t}$$
$$+ 9\beta_1 e^{3t} + 9t\beta_2 e^{3t} + 9\beta_3 t^2 e^{3t} = t^2 e^{3t}$$

$$\left.\begin{aligned} 9\beta_1 + 3\beta_2 + 3\beta_2 + 2\beta_3 + 9\beta_1 &= 0 \\ 9\beta_2 + 6\beta_3 + 6\beta_3 + 9\beta_2 &= 0 \\ 9\beta_3 + 9\beta_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{162} \\ \beta_2 &= -\frac{1}{27} = -\frac{6}{162} \\ \beta_3 &= \frac{1}{18} = \frac{9}{162} \end{aligned}$$

άρα μία $y_\mu(t) = \dfrac{1}{162}\left(1 - 6t + 9t^2\right) e^{3t} = \dfrac{1}{162} e^{3t} (1-3t)^2$

και η γενική λύση της $L(y) = t^2 e^{3t}$ είναι:

$$y(t) = c_1 \,\text{ημ}3t + c_2 \,\text{συν}3t + \frac{1}{162} e^{3t} (1-3t)^2$$

Ασκήσεις

1. $y'' + 4y = \text{συν}t$
2. $y'' + 4y = \text{ημ}2t$
3. $y'' - 4y = 3e^{2t} + 4e^{-t}$
4. $y'' - y' - 2y = t^2 + \text{συν}t$
5. $y'' + y = t e^{t} \text{συν}2t$
6. $y''' = t^2 + e^{-t} \text{ημ}t$