VII. Η ΓΡΑΜΜΙΚΗ Δ.Ε. ν-τάξης με μεταβλητούς συντελεστές.

Η γενική μορφή της Γ.Δ.Ε. με μεταβλητούς συντελεστές είναι:

$$\alpha_0(t)\,y^{(\nu)} + \alpha_1(t)\,y^{(\nu-1)} + \cdots + \alpha_\nu(t)\,y = B(t) \qquad (0)$$

Σημεία t στα οποία $\alpha_0(t)=0$ λέγονται ιδιάζοντα σημεία. Προς το παρόν υποθέτουμε $\alpha_0(t) \neq 0$ για κάθε $t \in I$, οπότε η (0) (με διαίρεση) παίρνει την μορφή:

$$L(y) = y^{(\nu)} + \alpha_1(t)\,y^{(\nu-1)} + \cdots + \alpha_\nu(t)\,y = B(t) \qquad (1)$$

Όλα τα αποτελέσματα περί υπάρξεως, μοναδικότητας των λύσεων Π.Α.Τ., γραμμικής ανεξαρτησίας που ισχύουν για Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές ισχύουν και για την (1).

Δεν υπάρχει όμως το ανάλογο του θεωρήματος που ορίζει ν γραμμ. ανεξάρτητες λύσεις (με βάση τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου) της Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές. Η επίλυση, συνεπώς, της (1) είναι δύσκολη και γίνεται κυρίως με δυναμοσειρές. Παρ' όλα αυτά θα διατυπώσουμε ορισμένα χρήσιμα αποτελέσματα στα οποία όμως γίνεται η υπόθεση ότι μιά λύση της (1) είναι γνωστή. Θα περιοριστούμε σε Δ.Ε. 2ης τάξης.

Ελάττωση της τάξης της $y'' + \alpha_1(t)y' + \alpha_2(t)y = 0 \qquad (2)$

Έστω φ_1 μιά λύση της (2). Αναζητούμε μιά λύση της μορφής $u\varphi_1$. Τότε θα πρέπει να ισχύει: (προσέξτε ότι οι α_1, α_2 είναι συναρτήσει

$$(u\varphi_1)'' + \alpha_1(u\varphi_1)' + \alpha_2(u\varphi_1) = 0$$

$$u''\varphi_1 + 2u'\varphi_1' + u\varphi_1'' + \alpha_1 u'\varphi_1 + \alpha_1 u\varphi_1' + \alpha_2 u\varphi_1 = 0$$

$$u''\varphi_1 + 2u'\varphi_1' + \alpha_1 u'\varphi_1 + u(\underbrace{\varphi_1'' + \alpha_1\varphi_1' + \alpha_2\varphi_1}_{0}) = 0$$

Θέτω $v = u'$ και υποθέτω ότι $\varphi_1(t) \neq 0$ για κάθε $t \in I$

$$v'\phi_1^2 + (2\phi_1\phi_1' + \alpha_1\phi_1^2)v = 0 \quad \Rightarrow \quad (v\phi_1^2)' + \alpha_1(\phi_1^2 v) = 0$$

και $\quad \phi_1^2(t)\,v(t) = c\, e^{-\int_{t_0}^{t}\alpha_1(s)ds}$ (η σταθερά c δεν επηρεάζει τον προσδιορισμό της δεύτερης λύσης)

$$v(t) = \frac{1}{\phi_1^2(t)} e^{-\int_{t_0}^{t}\alpha_1(s)ds} \quad \text{και} \quad u(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\phi_1^2(s)} e^{-\int_{t_0}^{s}\alpha_1(\tau)d\tau} ds$$

οπότε η δεύτερη λύση δίνεται από τον τύπο:

$$\phi_2(t) = \phi_1(t) \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\phi_1^2(s)} e^{-\int_{t_0}^{s}\alpha_1(\tau)d\tau} ds$$

Οι ϕ_1, ϕ_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες και αποτελούν μία βάση ή ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων της (2).

<u>Παράδειγμα</u> : $\quad y'' - \frac{2}{t^2}y = 0 \qquad (0<t<\infty)$

Μία λύση $\phi_1(t)$ είναι η t^2. Έστω $\phi_2(t) = u(t)\,\phi_1(t)$

$$u''t^2 + 2u'\cdot 2t + u\cdot 2 - \frac{2}{t^2}\cdot t^2\cdot u = 0 \quad \Rightarrow \quad u'' + 4u'\frac{1}{t} = 0$$

$(v = u') \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{t^4} \quad$ άρα μία $\quad u(t) = -\frac{1}{3t^3}$

(παραλείποντας τον συντελεστή $-\frac{1}{3}$) έχουμε $\quad \phi_2(t) = t^2\cdot\frac{1}{t^3} = \frac{1}{t}$

Άρα $\quad \phi_1(t) = t^2 \quad , \phi_2(t) = \frac{1}{t} \quad$ θεμελιώδες σύστημα λύσεων.

<u>Παράδειγμα:</u> (μη ομογενούς) $y'' - \frac{2}{t^2}y = t \qquad (t>0)$

Είδαμε προηγουμένως ότι ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων της ομογενούς είναι $\phi_1(t) = t^2$, $\phi_2(t) = \frac{1}{t}$. Αναζητούμε λύση της μη ομογενούς, της μορφής $u_1\phi_1 + u_2\phi_2$. Θα πρέπει οι u_1', u_2' να ικανοποιούν :

$$t^2 u_1' + \frac{1}{t}u_2' = 0$$
$$2t\, u_1' - \frac{1}{t^2}u_2' = t$$

$W(\phi_1,\phi_2)(t) = -3$ και $u_1'(t) = \frac{1}{3}$, $u_2'(t) = -\frac{t^3}{3}$

$u_1(t) = \frac{t}{3}$, $u_2(t) = -\frac{t^4}{12}$. Άρα $y_\mu(t) = \frac{t}{3}t^2 + \left(-\frac{t^4}{12}\right)\frac{1}{t} = \frac{t^3}{3} - \frac{t^3}{12} = \frac{t^3}{4}$

και η γενική λύση είναι $y(t) = \frac{t^3}{4} + c_1 t^2 + \frac{c_2}{t}$

<u>Ασκήσεις</u>

1. Μία λύση της $t^2y'' - 2y = 0$ $(t>0)$ είναι η $\phi_1(t) = t^2$.
   Βρείτε τις λύσεις της $t^2y'' - 2y = 2t-1$

2. Μία λύση της $t^2y'' - ty' + y = 0$ είναι η $\phi_1(t) = t$. Βρείτε τις λύσεις της $t^2y'' - ty' + y = t^2$ που ικανοποιεί τις $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

VIII. ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ Γ.Δ.Ε. ΜΕ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Μιά συνάρτηση $g: I \to \mathbb{R}$ λέγεται αναλυτική στο t_0 αν μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά :

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t-t_0)^k$$

όπου c_k σταθερές και η σειρά συγκλίνει για $|t-t_0| < r_0$, $(r_0 > 0)$.
Θυμίζουμε ότι όλες οι παράγωγοι της g υπάρχουν στο $|t-t_0| < r_0$ και υπολογίζονται παραγωγίζοντας έναν-έναν όρο της δυναμοσειράς.
Αν οι συντελεστές $\alpha_1(\cdot), \alpha_2(\cdot), \dots, \alpha_\nu(\cdot)$ της :

$$L(y) = y^{(\nu)} + \alpha_1 y^{(\nu-1)} + \alpha_2 y^{(\nu-2)} + \dots + \alpha_\nu y = 0 \qquad (1)$$

είναι αναλυτικές στο t_0 τότε (όπως προκύπτει) είναι αναλυτικές και οι λύσεις της (1). Μπορούμε λοιπόν υποθέτοντας ότι η λύση της (1) είναι $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t-t_0)^k$ να προσδιορίσουμε τους συντελεστές c_k.

<u>Παράδειγμα</u>: $L(y) = y'' - ty = 0 \qquad (2)$

$\alpha_1(t) = 0$, $\alpha_2(t) = -t$ αναλυτικές παντού (άρα και στο μηδέν).
Έστω $\phi(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_k t^k + \dots$ μιά λύση της (2).

$$\phi''(t) = 2c_2 + 3\cdot 2 c_3 t + 4\cdot 3 c_4 t^2 + 5\cdot 4 c_5 t^3 + \dots$$

$$t\phi(t) = c_0 t + c_1 t^2 + c_2 t^3 + c_3 t^4 + c_4 t^5 + c_5 t^6 + \dots$$

$$\phi''(t) - t\phi(t) = 2c_2 + (3\cdot 2 c_3 - c_0)t + (4\cdot 3 c_4 - c_1)\cdot t^2 + (4\cdot 5\cdot c_5 - c_2)t^3 + \dots$$

$$= 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+2)(k+1) c_{k+2} - c_{k-1} \right] t^k = 0 \qquad , t \in I.$$

οπότε : $2c_2 = 0$

$$(\kappa+2)(\kappa+1)C_{\kappa+2} - C_{\kappa-1} = 0 \qquad , \kappa = 1,2,3,\dots$$

Άρα $\quad C_2 = 0 \;,\; c_0 = 3\cdot 2\cdot c_3 \Rightarrow c_3 = \dfrac{c_0}{2\cdot 3}$

$$c_1 = 4\cdot 3\, c_4 \Rightarrow c_4 = \frac{c_1}{4\cdot 3} \;,\; c_5 = \frac{c_2}{5\cdot 4} = 0 \;,\; c_6 = \frac{c_3}{5\cdot 6} = \frac{c_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}$$

$$c_7 = \frac{c_4}{7\cdot 6} = \frac{c_1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}$$

Γενικά

$$C_{3\mu} = \frac{c_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdots(3\mu-1)\cdot 3\mu} \qquad , \mu = 1,2,\dots$$

$$C_{3\mu+1} = \frac{c_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdots(3\mu)(3\mu+1)} \qquad , \mu = 1,2,\dots$$

$$C_{3\mu+2} = 0 \qquad , \mu = 0,1,2,3,\dots$$

Άρα

$$\varphi(t) = c_0\underbrace{\left[1 + \frac{t^3}{3\cdot 2} + \frac{t^6}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2} + \cdots\right]}_{\varphi_1} + c_1\cdot\underbrace{\left[t + \frac{t^4}{4\cdot 3} + \frac{t^7}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3} + \cdots\right]}_{\varphi_2}$$

$$\varphi_1(t) = 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{t^{3\mu}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdots(3\mu-1)\cdot 3\mu}$$

$$\varphi_2(t) = \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{t^{3\mu+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdots 3\mu\cdot(3\mu+1)} + t$$

Οι φ_1 (με $c_0=1, c_1=0$) και φ_2 ($c_0=0, c_1=1$) είναι λύσεις της (2)
Αποδεικνύεται ότι συγκλίνουν και ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Ασκήσεις

1. Βρείτε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις - δυναμοσειρές των:

$$\alpha)\ y'' - ty' + y = 0 \qquad \beta)\ y'' + y = 0 \qquad \gamma)\ y'' + t^3 y' + t^2 y = 0$$

2. Βρείτε την λύση της $y'' + (t-1)^2 y' - (t-1)y = 0$
στη μορφή $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t-1)^k$, με $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

3 Βρείτε την λύση της: $(1+t^2)\, y'' + y = 0$ στη μορφή

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot t^k \ , \quad y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 1 \qquad (\, |t| < 1)$$

4. Η εξίσωση : $(1-t^2)\, y'' - t y' + \alpha^2 y = 0$ λέγεται εξίσωση Chebyshev.

(a). Υπολογίστε δύο γραμμ. ανεξάρτητες λύσεις-δυναμοσειρές για $|t| < 1$.

(b). Δείξτε ότι για $\alpha = \nu \in \{0,1,2,3,\dots\}$ υπάρχει λύση πολυωνυμική, βαθμού ν. (Πολυώνυμα Chebyshev).

Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ LEGENDRE

$$L(y) = (1-t^2)y'' - 2ty' + \alpha(\alpha+1)y = 0 \qquad (1) \qquad ,\alpha \in \mathbb{R}$$

Αν γράψουμε την (1) στη μορφή :

$$y'' - \frac{2t}{1-t^2}y' + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-t^2}y = 0$$

οι συναρτήσεις $\alpha_1(t) = \dfrac{-2t}{1-t^2}$, $\alpha_2(t) = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{1-t^2}$ είναι αναλυτικές στο $t_0=0$

γιατί $\dfrac{1}{1-t^2} = 1+t^2+t^4+t^6+\cdots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} t^{2k}$ και η σειρά συγκλίνει

για $|t|<1$. Τα αναπτύγματα των $\alpha_1(\cdot)$, $\alpha_2(\cdot)$ είναι:

$$\alpha_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-2)t^{2k+1} = -2t-2t^3-2t^5-\cdots$$

$$\alpha_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha(\alpha+1)t^{2k}$$ που συγκλίνουν για $|t|<1$.

Άρα οι λύσεις της $L(y)=0$ στο $\{t : |t|<1\}$ αναπτύσσονται σε δυναμοσειρές που συγκλίνουν για $|t|<1$.

Έστω y μιά λύση της εξίσωσης Legendre στο $\{t : |t|<1\}$

$$y(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$$. Έχουμε

$$y'(t) = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k t^{k-1}$$

Επίσης $$-2ty'(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-2kc_k)t^k$$ και

$$y''(t) = 2\cdot c_2 + 3\cdot 2\cdot c_3\cdot t + 4\cdot 3\cdot c_4\cdot t^2 + 5\cdot 4\, c_5 t^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k t^{k-2}$$

και $$-t^2y''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} -k(k-1)c_k t^k$$

Η $y''(t)$ γράφεται επίσης: $\quad y''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)\, C_{k+2}\, t^k$

$$L(y)(t) = (1-t^2) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)\, C_{k+2}\, t^k - 2t \sum_{k=0}^{\infty} k C_k\, t^{k-1} + \alpha(\alpha+1) \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)\, C_{k+2}\, t^k - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)\, C_{k+2}\, t^{k+2}}_{1} - 2\sum_{k=0}^{\infty} k C_k t^k + \alpha(\alpha+1) \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k$$

(Στην 1 θέτουμε $k+2=\mu$ $\quad$ οπότε $\sum_{\mu=2}^{\infty} (\mu-1)\mu C_\mu t^\mu = \sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu-1)\mu C_\mu t^\mu$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) C_k t^k \quad)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \Big[(k+1)(k+2)\, C_{k+2} - k(k-1) C_k - 2k C_k + \alpha(\alpha+1) C_k \Big] t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \Big[(k+2)(k+1)\, C_{k+2} + (\alpha+k+1)(\alpha-k) C_k \Big] t^k = 0$$

Άρα $\quad (k+2)(k+1)\, C_{k+2} + (\alpha+k+1)(\alpha-k)\, C_k = 0 \quad , \; k=0,1,2,\ldots$

Η τελευταία σχέση είναι αναδρομική σχέση που συνδέει τα C_k, C_{k+2}.

$k=0$: $\quad 2C_2 + \alpha(\alpha+1) C_0 = 0$

$$C_2 = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{2} C_0$$

$k=1$: $\quad C_3 = -\dfrac{(\alpha+2)(\alpha-1)}{3\cdot 2} C_1$

$$k=2 \quad : \quad C_4 = -\frac{(\alpha+3)(\alpha-2)}{4\cdot 3}C_2 \quad \frac{(\alpha+3)(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)}{4\cdot 3\cdot 2}C_0$$

$$k=3 \quad : \quad C_5 = -\frac{(\alpha+4)(\alpha-3)}{5\cdot 4}C_3 = \frac{(\alpha+4)(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}C_1$$

$$C_{2m} = (-1)^m \frac{(\alpha+2m-1)(\alpha+2m-3)\cdots(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)\cdots(\alpha-2m+2)}{(2m)!}C_0$$

$$C_{2m+1} = (-1)^m \frac{(\alpha+2m)(\alpha+2m-2)\cdots(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2m+1)}{(2m+1)!}C_1$$

$$y(t) = C_0\, y_1(t) + C_1\, y_2(t)$$

με $\quad y_1(t) = 1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}t^2 + \frac{(\alpha+3)(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)}{4!}t^4 - \cdots$

$$y_1(t) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \frac{(\alpha+2m-1)(\alpha+2m-3)\cdots(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)\cdots(\alpha-2m+2)}{(2m)!}t^{2m}$$

και $\quad y_2(t) = t - \frac{(\alpha+2)(\alpha-1)}{3!}t^3 + \frac{(\alpha+4)(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)}{5!}t^5 - \cdots$

$$y_2(t) = t + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \frac{(\alpha+2m)(\alpha+2m-2)\cdots(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2m+1)}{(2m+1)!}t^{2m+1}$$

- Αν το $\alpha \in \{0,2,4,6,\ldots,2m,\ldots\}$

τότε η $y_1(\cdot)$ έχει πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών όρων.

Π.χ. αν $\alpha=0 \qquad y_1(t)=1$

αν $\alpha=2$ $\quad y_1(t) = 1-3t^2$

αν $\alpha=4$ $\quad y_1(t) = 1-10t^2+\frac{35}{3}t^4$

αν $\alpha=6$ $\quad y_1(t) = 1-21t^2+63t^4-\frac{231}{5}t^6$

(προσέξτε ότι για α άρτιο μη αρνητικό η λύση $y_2(\cdot)$ <u>δεν</u> είναι πολυώνυμο)

- Αν το $\alpha \in \{1,2,3,\dots,2m+1,\dots\}$

τότε η $y_2(\cdot)$ έχει πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών όρων.

Π.χ. αν $\alpha=1$ $\quad y_2(t)=t$

αν $\alpha=3$ $\quad y_2(t)=t-\frac{5}{3}t^3$

αν $\alpha=5$ $\quad y_2(t)=t-\frac{14}{3}t^3+\frac{21}{5}t^5$

αν $\alpha=7$ $\quad y_2(t)=t-9t^3+\frac{99}{5}t^5-\frac{429}{35}t^7$

Ονομάζουμε την πολυωνυμική λύση P_ν της (1) (με $\alpha=\nu\in\mathbb{N}\cup\{0\}$) που ικανοποιεί την $P_\nu(1)=1$, ν-οστό πολυώνυμο Legendre.

<u>Πρόταση</u>: Η $y(t) = \dfrac{d^\nu}{dt^\nu}(t^2-1)^\nu$ ικανοποιεί την

$$(1-t^2)y'' - 2ty' + \nu(\nu+1)y = 0 \qquad (2)$$

Απόδειξη: Έστω $u(t) = (t^2-1)^\nu$.

$$(t^2-1)u' - 2\nu t u = (t^2-1)\nu(t^2-1)^{\nu-1}\cdot 2t - 2\nu t(t^2-1)^\nu = 0 \qquad (3)$$

- αν $f(t) = t^2-1$ τότε $f^{(0)}(t) = t^2-1$, $f^{(1)}(t) = 2t$,

  $f^{(2)}(t) = 2$, $f^{(p)}(t) = 0$ για $p>2$.

Άρα $$[f\cdot u']^{(\nu+1)} = f\cdot u^{(\nu+2)} + (\nu+1)f'u^{(\nu+1)} + \frac{\nu(\nu+1)}{2}f''u^{(\nu)}$$

συνεπώς $$\left[(t^2-1)u'(t)\right]^{(\nu+1)} = (t^2-1)u^{(\nu+2)}(t) + (\nu+1)u^{(\nu+1)}(t)\cdot 2t + \frac{\nu(\nu+1)}{2}\cdot 2\cdot u^{(\nu)}(t).$$

Επίσης για $f(t) = t$, $f'(t) = 1$, $f^{(p)}(t) = 0$, $p>1$.

$$[f\cdot u]^{(\nu+1)} = f\cdot u^{(\nu+1)} + (\nu+1)f'u^{(\nu)}$$

$$[tu]^{(\nu+1)} = t u^{(\nu+1)} + (\nu+1)u^{(\nu)}$$

Άρα παραγωγίζοντας την (3) $\nu+1$ φορές έχουμε:

$$(t^2-1)u^{(\nu+2)} + 2(\nu+1)t u^{(\nu+1)} + \nu(\nu+1)u^{(\nu)} - 2\nu t u^{(\nu+1)} - 2\nu(\nu+1)u^{(\nu)} = 0$$

εφ' όσον $y(t) = u^{(\nu)}$ έχουμε: $(t^2-1)y'' + 2ty' - \nu(\nu+1)y = 0$

άρα $(1-t^2)y'' - 2ty' + \nu(\nu+1)y = 0$ και η $y(\cdot)$ είναι λύση της (2).

Το πολυώνυμο $y(t)=\left[(t^2-1)\quad\right]^{(\nu)}$ ικανοποιεί την $y(1)=2^{\nu}\cdot\nu!$

Πράγματι, $y(t)=\left[(t-1)^{\nu}(t+1)^{\nu}\right]^{(\nu)}=\left[(t-1)^{\nu}\right]^{(\nu)}(t+1)^{\nu}+(t-1)\Pi(t)$

$=\nu!\,(t+1)^{\nu}+(t-1)\Pi(t)$ άρα $y(1)=2^{\nu}\cdot\nu!$

Συνεπώς το πολυώνυμο: $P_{\nu}(t)=\dfrac{1}{2^{\nu}\nu!}\dfrac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}(t^2-1)^{\nu}$

είναι το ν-οστό πολυώνυμο Legendre.

$P_0(t)=1$, $P_1(t)=t$, $P_2(t)=\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}$, $P_3(t)=\frac{5}{2}t^3-\frac{3}{2}t$

$P_4(t)=\frac{35}{8}t^4-\frac{15}{4}t^2+\frac{3}{8}$.

Ασκήσεις

1. Βρείτε την λύση της: $(1-t^2)y''-2ty'=0$
2. Δείξτε ότι η $q(t)=\frac{t}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}-1$ $\quad(|t|<1)$

   είναι λύση της Legendre με $\alpha=1$.

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε. ΜΕ ΟΜΑΛΑ ΙΔΙΑΖΟΝΤΑ ΣΗΜΕΙΑ

Ας θεωρήσουμε την διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$\alpha_0(t)y^{(\nu)} + \alpha_1(t)y^{(\nu-1)} + \cdots + \alpha_\nu(t)y = 0 \qquad (1),$$

(με $\alpha_0(\cdot), \alpha_1(\cdot), \ldots, \alpha_\nu(\cdot)$ αναλυτικές σε ένα σημείο $t_0 \in I$.)

Αν $\alpha_0(t_0) = 0$ το t_0 λέμε ότι είναι ιδιάζον σημείο της (1). Σε αυτή την περίπτωση δεν εφαρμόζονται τα αποτελέσματα που ισχύουν για προβλήματα αρχικών τιμών στο t_0.

Υπάρχει όμως μιά κλάση Δ.Ε. όπου η ιδιάζουσα συμπεριφορά στο t_0 είναι "ασθενής".

Λέμε ότι το t_0 είναι ομαλό ιδιάζον σημείο της (1) αν η Δ.Ε. μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$(t-t_0)^\nu y^{(\nu)} + b_1(t)(t-t_0)^{\nu-1}y^{(\nu-1)} + \cdots + b_\nu(t)y = 0 \qquad (2)$$

γύρω από το t_0 και $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$ αναλυτικές στο t_0.

Αν οι $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$ μπορούν να γραφούν στη μορφή:

$$b_\kappa(t) = (t-t_0)^\kappa \beta_\kappa(t) \qquad \kappa = 1,2,\ldots,\nu$$

όπου $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\kappa$ αναλυτικές στο t_0 τότε η (2) γίνεται:

$$y^{(\nu)} + \beta_1(t)y^{(\nu-1)} + \cdots + \beta_\nu(t)y = 0 \qquad (3)$$

Άρα η (2) είναι μιά γενίκευση της Δ.Ε. (3).

Μιά Δ.Ε. της μορφής:

$$c_0(t)(t-t_0)^\nu y^{(\nu)} + c_1(t)(t-t_0)^{\nu-1}y^{(\nu-1)} + \cdots + c_\nu(t)y = 0$$

έχει ομαλό ιδιάζον σημείο στο t_0 αν $c_0, c_1, \ldots, c_\nu$ αναλυτικές στο t_0 και $c_0(t_0) \neq 0$.

Για να γίνει κατανοητή η σημασία της ομαλότητας των ιδιαζόντων σημείων δίνουμε το ακόλουθο παράδειγμα:

<u>Παράδειγμα:</u> $$t^2 y'' - y' - \frac{3}{4} y = 0 \qquad (4)$$

Το $t_0 = 0$ είναι ιδιάζον σημείο αλλά όχι ομαλό ιδιάζον σημείο, γιατί ο συντελεστής του y', το -1, δεν μπορεί να γραφεί στη μορφή $t\, b_1(t)$ με $b_1(\cdot)$ αναλυτική στο $t_0 = 0$.

As υποθέσουμε ότι $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ μία λύση της (4). Τότε

$$y' = c_1 + 2t c_2 + 3 c_3 t^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} t^k$$

$$y'' = 2c_2 + 6 c_3 t + 3\cdot 4 c_4 t^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)\, t^k c_{k+2}$$

Έχουμε $$2t^2 c_2 + 6 c_3 t^3 + 3\cdot 4 c_4 t^4 + 4\cdot 5\, c_5 \cdot t^5 + 5\cdot 6\, c_6 t^6 + \cdots$$

$$- c_1 - 2t c_2 - 3 c_3 t^2 - 4 c_4 t^3 - 5 c_5 t^4 - 6\cdot c_6 t^5 - \cdots$$

$$-\frac{3}{4} c_0 - \frac{3}{4} c_1 t - \frac{3}{4} c_2 t^2 - \frac{3}{4} c_3 t^3 - \frac{3}{4} c_4 t^4 - \frac{3}{4} c_5 t^5 - \cdots = 0$$

Άρα
$$\begin{aligned}
-c_1 - \tfrac{3}{4} c_0 &= 0 \\
-2c_2 - \tfrac{3}{4} c_1 &= 0 \\
2 c_2 - 3 c_3 - \tfrac{3}{4} c_2 &= 0 \\
6 c_3 - 4 c_4 - \tfrac{3}{4} c_3 &= 0 \\
3\cdot 4\, c_4 - 5\cdot c_5 - \tfrac{3}{4} c_4 &= 0 \\
4\cdot 5\cdot c_5 - 6\cdot c_6 - \tfrac{3}{4} c_5 &= 0
\end{aligned}$$

$$k(k-1) c_k - (k+1) c_{k+1} - \frac{3}{4} c_k = 0$$

$$c_{k+1} = c_k \, \frac{k^2 - k - \frac{3}{4}}{k+1} \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Αν $c_0 \neq 0$ (δηλαδή y μή τετριμμένη)

$$\left| \frac{c_{k+1}\, t^{k+1}}{c_k \cdot t^k} \right| = \left| \frac{k^2-k-\frac{3}{4}}{k+1} \right| |t| \longrightarrow +\infty \qquad \text{για } t \neq 0$$

Συνεπώς η $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ συγκλίνει μόνο για $t=0$ και έτσι δεν παριστάνει συνάρτηση γύρω από το $t_0 = 0$ ούτε και λύση της (4).

Η ΕΞΙΣΩΣΗ EULER

Ενα απλό παράδειγμα Δ.Ε. 2ης τάξης με ομαλό ιδιάζον σημείο στο μηδέν είναι η εξίσωση του Euler :

$$L(y) = t^2 y'' + \alpha \cdot t \cdot y' + b \cdot y = 0 \qquad (1)$$

Ας θεωρήσουμε πρώτα την (1) για $t > 0$. Αναζητούμε λύση της μορφής : t^r.

$$L(t^r) = t^2 r(r-1) t^{r-2} + \alpha t r t^{r-1} + b t^r = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$L(t^r) = [\underbrace{r(r-1) + \alpha \cdot r + b}_{q(r)}] \cdot t^r \qquad (*)$$

Είναι σαφές ότι αν r_1 ρίζα του πολυωνύμου $q(r)$ τότε $L(t^{r_1}) = 0$ δηλαδή $y_1(t) = t^{r_1}$ λύση της (1).
Αν r_2 $(\neq r_1)$ μιά δεύτερη ρίζα του q τότε $y_2(t) = t^{r_2}$ μιά δεύτερη λύση της (1).

Αν $r = r_1 = r_2$ διπλή ρίζα τότε $q(r) = q'(r) = 0$

Παραγωγίζοντας ως προς r την (*) έχουμε :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}L(t^r) &= L\left(\frac{\partial}{\partial r}t^r\right) = L(t^r \ln t) \\ \frac{\partial}{\partial r}[q(r)\cdot t^r] &= [q'(r) + q(r)\ln t]\, t^r \end{aligned}\right\} \Rightarrow L(t^r \ln t) = [q'(r) + q(r)\ln t]\, t^r$$

Αν λοιπόν r διπλή ρίζα του $q(\cdot)$ τότε η δευτερη λύση της (1) θα είναι η $y_2(t) = t^r \ln t$ (γιατί $L(t^r \ln t) = 0$)

Και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, δηλαδή $r_1 \neq r_2$, $r_1 = r_2$ οι $y_1(\cdot)$, $y_2(\cdot)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες (αποδείξτε).

Στην περίπτωση που οι ρίζες $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ έχουμε:

$$\varphi_1(t) = t^{r_1} = e^{r_1 \ln t} = e^{(\ln t)u + (\ln t)v i} = e^{u \ln t}\left(\sigma v \nu(v \ln t) + i\eta\mu(v \ln t)\right)$$

$$\varphi_2(t) = t^{r_2} = e^{r_2 \ln t} = e^{(\ln t)u - (\ln t)v i} = e^{u \ln t}\left(\sigma v \nu(v \ln t) - i\eta\mu(v \ln t)\right)$$

Αν $y_1 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$, $y_2 = \frac{1}{2i}(\varphi_1 - \varphi_2)$ τότε οι y_1, y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

$$y_1(t) = t^u \sigma v \nu(v \ln t) \quad , \quad y_2(t) = t^u \eta\mu(v \ln t)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση $t < 0$.
Αναζητούμε λύσεις της μορφής $(-t)^r$.

$$[(-t)^r]' = r(-t)^{r-1}(-1) = -r(-t)^{r-1}$$

$$[(-t)^r]'' = -r(r-1)(-t)^{r-2}(-1) = r(r-1)(-t)^{r-2}$$

$$t^2[(-t)^r]'' + \alpha t[(-t)^r]' + b(-t)^r = L[(-t)^r]$$

$$L[(-t)^r] = (-t)^r\,[r(r-1) + \alpha r + b] = 0$$

Άρα $(-t)^r$ λύση αν r ρίζα του $q(r)$.
Έχουμε (κατά αναλογία με την περίπτωση $t>0$)
ότι αν $r_1 \neq r_2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $y_1(t) = (-t)^{r_1}$, $y_2(t) = (-t)^{r_2}$
αν $r_1 = r_2 = r$, $y_1(t) = (-t)^r$, $y_2(t) = (-t)^r \ln(-t)$
αν $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ $r_{1,2} = u \pm iv$
$y_1(t) = (-t)^u \text{συν}[(\ln(-t)) \cdot v]$, $y_2(t) = (-t)^u \text{ημ}[v \ln(-t)]$

Συνοψίζοντας για $t>0$ και $t<0$ και παρατηρώντας $|t| = \begin{cases} t & t>0 \\ -t & t<0 \end{cases}$
έχουμε:

- $r_1 \neq r_2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ $\quad y_1(t) = |t|^{r_1}$, $y_2(t) = |t|^{r_2}$, $t \neq 0$
- $r_1 = r_2 = r$ $\quad y_1(t) = |t|^r$, $y_2(t) = |t|^r \ln|t|$, $t \neq 0$
- $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ $\quad y_1(t) = |t|^u \text{συν}(v \ln|t|)$, $y_2(t) = |t|^u \text{ημ}(v \ln|t|)$, $t \neq 0$

<u>Σημείωση</u>: Όλα τα παραπάνω επεκτείνονται με προφανή τρόπο για Δ.Ε. Euler ν-τάξης,
$$L(y) = t^{\nu} y^{(\nu)} + \alpha_1 t y^{(\nu-1)} + \cdots + \alpha_\nu y = 0$$

<u>Ασκήσεις</u>:
1. $t^2 y'' + 2t y' - 6y = 0$
2. $2t^2 y'' + t y' - y = 0$
3. $t^3 y''' + 2t^2 y'' - t y' + y = 0$

Η Δ.Ε. 2ης τάξης με ομαλά ιδιάζοντα σημεία - Γενική μορφή

Η γενική μορφή της δ.ε. 2ης τάξης με ομαλά ιδιάζοντα σημεία, είναι:

$$t^2 y'' + \alpha(t) t y' + b(t)\cdot y = 0 \qquad (1)$$

με $\alpha(\cdot)$, $b(\cdot)$ αναλυτικές στο μηδέν. Τότε $\alpha(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k t^k$, $b(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k t^k$.

Έστω $y(t)=t^r\cdot\sum_{k=0}^{\infty} c_k\cdot t^k \quad (c_0\neq 0)$.

Τότε $$y'(t)=t^{r-1}\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_k t^k$$

$$y''(t)=t^{r-2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k t^k$$

και $$b(t)\cdot y(t)=t^r\left(\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k t^k\right)=t^r\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\beta}_k t^k$$

με $$\tilde{\beta}_k=\sum_{i=0}^{k}c_i\beta_{k-i}.$$

$$t\cdot\alpha(t)y'(t)=t^r\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_k t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k t^k\right)=t^r\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\alpha}_k t^k$$

με $$\tilde{\alpha}_k=\sum_{i=0}^{k}(i+r)c_i\alpha_{k-i}$$

$$t^2y''(t)=t^r\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k t^k$$

Άρα $$L(y)(t)=t^r\sum_{k=0}^{\infty}\Big[\underbrace{(k+r)(k+r-1)c_k+\tilde{\alpha}_k+\tilde{\beta}_k}_{\gamma_k}\Big]t^k=0$$

Η $y(\cdot)$ είναι λύση της (1) αν

$$\gamma_k=(k+r)(k+r-1)c_k+\tilde{\alpha}_k+\tilde{\beta}_k=0 \qquad \text{για } k=0,1,2,\dots$$

$$\gamma_0=r(r-1)c_0+\tilde{\alpha}_0+\tilde{\beta}_0=\underbrace{r(r-1)c_0+rc_0\alpha_0+c_0\beta_0}_{c_0\cdot q(r)}=0$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{c}\left[r(r-1)+r\alpha_0+\beta_0\right]c_0=0 \\ c_0\neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{r(r-1)+r\alpha_0+\beta_0}_{q(r)}=0$$

Το $q(r)=r(r-1)+r\alpha_0+\beta_0$ λέγεται ενδεικτικό πολυώνυμο και το $r=r_1$ ή r_2 όπου r_1, r_2 οι ρίζες του q.

Τα γ_k γράφονται :

$$\gamma_k=\underbrace{\left[(k+r)(k+r-1)+(k+r)\alpha_0+\beta_0\right]}_{i=k}c_k+\sum_{i=0}^{k-1}\left[(i+r)\alpha_{k-i}+\beta_{k-i}\right]c_i$$

Θέτουμε : $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\left[(i+r)\alpha_{k-i}+\beta_{k-i}\right]c_i=d_k \ , \quad k=1,2,3,\ldots \qquad (3)$

και τότε $\gamma_k=\underbrace{q(r+k)}_{q \text{ του } r+k}\cdot c_k+d_k=0 \qquad (4)$

Λύνοντας τις (3),(4) ως προς r, c_0 έχουμε:

$$D_1(r):=d_1=(r\alpha_1+\beta_1)c_0$$

$$C_1(r):=c_1=-\frac{D_1(r)}{q(r+1)}$$

και γενικά:

$$D_k(r)=\sum_{i=0}^{k-1}\left[(i+r)\alpha_{k-i}+\beta_{k-i}\right]C_i(r)$$

$$C_k(r)=-\frac{D_k(r)}{q(r+k)} \qquad k=1,2,3,\ldots$$

Τα C_k υπολογίζονται ως συναρτήσεις του r και τα μόνα σημεία στα οποία δεν υπάρχουν είναι όταν $q(r+k)=0$, $k=1,2,\ldots$

Άρα θα πρέπει $r_2+k \neq r_1$ ή $r_1+k \neq r_2$.

Η συνάρτηση $y(t) = c_0 t^r + t^r \sum_{k=1}^{\infty} C_k(r) t^k$ είναι λύση της (1)
(αν η σειρά συγκλίνει για $0<t<r_0$).

Οι περιπτώσεις $r_2+k = r_1$ ή $r_1+k = r_2$ μπορούν να εμφανισθούν
αν $r_1 = r_2$ και $k=0$ ή αν $r_1 > r_2$ ή αν $r_2 > r_1$.
Υποθέτουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι $r_1 > r_2$.
Τότε $q(r_1+k) \neq 0$ για $k=1,2,..$
Άρα το $C_k(r_1)$ υπάρχει για κάθε $k=1,2,..$
και θέτοντας $C_0(r)=1$ η συνάρτηση

$$y(t) = t^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} C_k(r_1) t^k \qquad (5)$$

είναι λύση της (1), (μπορούμε να δείξουμε ότι συγκλίνει για $0<|t|<r_0$)

Αν $r_2+k \neq r_1$ δηλαδή $r_1 - r_2 \neq k$ έχουμε
$q(r_2+k) \neq 0$ για $k=1,2,..$ και τότε υπάρχει δεύτερη λύση:

$$y_2(t) = t^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} C_k(r_2) t^k, \ (C_0(r_2)=1) \qquad (6)$$

(που επίσης συγκλίνει για $0<|t|<r_0$).

- Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι οι υπολογισμοί που έγιναν για $t>0$ ισχύουν και για $t<0$ και έτσι μπορούμε να θέσουμε $|t|^r$ στη θέση του t^r.

- Οι συγκλίσεις αποδεικνύονται (πάντοτε για $r_1 - r_2 \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$)
- $\alpha_0 = \alpha(0)$, $\beta_0 = b(0)$

- Αν r_1, r_2 ρίζες του $q(r) = r(r-1) + r\alpha(0) + b(0)$
με $\mathrm{Re}\, r_1 \geq \mathrm{Re}\, r_2$, για $0<|t|<r_0$ υπάρχει συγκλίνουσα

$$y_1(t) = |t|^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} C_k(r_1) |t|^k .$$

Αν $r_1-r_2 \notin \mathbb{N}\cup\{0\}$ τότε υπάρχει και $y_2(\cdot)$, συγκλίνουσα για $0<|t|<r_0$ που δίδεται από την σχέση:

$$y_2(t)=|t|^{r_2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty} C_k(r_2)|t|^k.$$

- Οι περιπτώσεις $r_1-r_2=0$ ή $r_1-r_2=k\in\mathbb{N}$ λέγονται εξαιρετικές.

Ασκήσεις

1. (a) Δείξτε ότι οι γραμμ. ανεξάρτητες λύσεις της δ.ε.:

$$3t^2y''+5ty'+3ty=0$$

δίδονται από τους τύπους:

$$y_1(t)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 3^k}{k!\,5\cdot 8\cdot 11\cdots(3k+2)}t^k$$

$$y_2(t)=\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 3^k}{k!\,4\cdot 7\cdot 10\cdots(3k+1)}t^k\right]|t|^{-\frac{2}{3}}$$

(b) Δείξτε ότι η λύση της μορφής: $|t|^r\cdot\sigma(t)$ της

$$t^2y''(t)+ty'(t)+t^2y(t)=0$$

δίδεται από τον τύπο: $y_1(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2\cdot 2^{2k}}t^{2k}$

(c) Δείξτε ότι η λύση της $t^2y''+ty'+\left(t^2-\frac{1}{4}\right)y=0$ είναι:

$$y(t)=|t|^{-\frac{1}{2}}(c_1\,\eta\mu t+c_2\,\sigma\upsilon\nu t)$$

όπου

$$\eta\mu t:=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}t^{2k-1}$$

$$\sigma\upsilon\nu t:=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+2}}{(2k)!}t^{2k}.$$

ΟΙ ΕΞΑΙΡΕΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

Όπως έχουμε αναφέρει οι δύο εξαιρετικές περιπτώσεις είναι:

(i) $r_1 = r_2$ (ii) $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}$

Έστω t με $0 < t < r_0$. Σε όλες τις περιπτώσεις (και στις εξαιρετικές) υπάρχει λύση της δ.ε.

$$t^2 y'' + t\,\alpha(t)\,y' + b(t)\,y = 0 \qquad (1)$$

που δίδεται από την:

$$y_1(t) = \Phi(t,r) = c_0 t^r + t^r \cdot \sum_{k=1}^{\infty} C_k(r)\, t^k \qquad (2)$$

Γνωρίζουμε ότι $L(y_1) = L(\Phi(t,r)) = t^r c_0\, q(r)$

(γιατί $L(y_1) = t^r \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k t^k$ με $\gamma_k = 0$ για $k = 1,2,3,\ldots$, εξ αιτίας του τρόπου που ορίσαμε τα $C_k(r)$, ενώ $\gamma_0 = c_0\, q(r)$, άρα $L(\Phi(t,r)) = c_0\, q(r)\, t^r$).

Τα C_k ορίζονται αναδρομικά από τις:

$$C_0(r) = c_0 \neq 0$$

$$q(r+k)\cdot C_k(r) = -D_k(r)$$

$$D_k(r) = \sum_{i=0}^{k-1} \left[(i+r)\,\alpha_{k-i} + \beta_{k-i} \right] C_i(r) \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

- (i) $\underline{r_1 = r_2 = r}$. Τότε $q(r) = q'(r) = 0$

Παραγωγίζοντας την (2) ως προς r έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial r} L(y_1(t)) = \frac{\partial}{\partial r} L(\Phi(t,r)) = L\left(\frac{\partial \Phi(t,r)}{\partial r} \right)$$

και $$\frac{\partial}{\partial r} t^r c_0\, q(r) = c_0 \left[q'(r) + q(r) \ln t \right] t^r$$

Το r είναι διπλή ρίζα του $q(\cdot)$ οπότε $q'(r)=q(r)=0$. Άρα

$$L\left(\frac{\partial\Phi(t,r)}{\partial r}\right)=0 \quad \text{και η} \quad y_2(t)=\frac{\partial\Phi(t,r)}{\partial r} \quad \text{είναι λύση της (1).}$$

Υπολογίζουμε λοιπόν την $\dfrac{\partial\Phi(t,r)}{\partial r}$.

$$y_2(t)=\frac{\partial}{\partial r}\Phi(t,r)=c_0\ln t\cdot t^r+\ln t\cdot t^r\cdot\sum_{k=1}^{\infty}C_k(r)t^k+t^r\sum_{k=1}^{\infty}C_k'(r)\cdot t^k$$

$$=\ln t\cdot\left(c_0t^r+t^r\cdot\sum_{k=1}^{\infty}C_k(r)t^r\right)+t^r\sum_{k=1}^{\infty}C_k'(r)\,t^k$$

$$y_2(t)=\ln t\cdot y_1(t)+t^r\cdot\sum_{k=1}^{\infty}C_k'(r)\cdot t^k$$

- (ii) $\underline{r_1-r_2=m\in\mathbb{N}}$

Με δεδομένο c_0 τα $C_1(r_2), C_2(r_2), \ldots, C_{m-1}(r_2)$ υπάρχουν, γιατί $q(r_2+k)\neq 0$ για $k=1,2,3,\ldots,m-1$. Άρα

$$C_k(r_2)=-\frac{D_k(r_2)}{q(r_2+k)} \qquad \text{για} \quad k=1,2,3,\ldots,m-1$$

Για $k=m$ όμως $q(r_2+m)=0$. Γράφουμε το $q(r)=(r-r_1)(r-r_2)$ άρα $q(r+m)=(r+m-r_1)(r+m-r_2)$. Όμως $m-r_1=-r_2$ άρα

$$q(r+m)=(r-r_2)(r+m-r_2).$$

Αν τώρα το $D_m(r)$ έχει παράγοντα το $r-r_2$ (δηλαδή αν $D_m(r_2)=0$) τότε θα έχουμε απαλοιφή του $r-r_2$ οπότε το $C_m(r_2)$ υπάρχει. Τότε και τα $C_{m+1}(r_2), C_{m+2}(r_2), \ldots$ υπάρχουν.
Σε αυτή την περίπτωση έχουμε μιά δεύτερη λύση:

$$y_2(t)=t^{r_2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}C_k(r_2)t^k$$

Μπορούμε όμως πάντα να επιλέξουμε το $C_0(r) = r - r_2$.
Τότε ο $r - r_2$ είναι παράγων του $D_k(r)$ γιατί το $D_k(r)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $C_0(r), C_1(r), \ldots, C_{k-1}(r)$ τα οποία με την σειρά τους έχουν παράγοντα το $C_0(r)$.

Άρα $D_k(r_2) = 0$ οπότε ισχύουν τα παραπάνω (όπως για $D_m(r_2)=0$) και θέτοντας:

$$\Psi(t,r) = t^r \sum_{k=0}^{\infty} C_k(r)\, t^k \qquad (C_0(r) = r - r_2)$$

έχουμε:

$$L(\Psi)(t) = (r - r_2)\, q(r)\, t^r \quad .$$

Αν θέσουμε $r = r_2$, $L(\Psi) = 0$ οπότε η $y(t) = \Psi(t, r_2)$ είναι μιά λύση της (1).

Όμως $C_0(r_2) = C_1(r_2) = \ldots = C_{m-1}(r_2) = 0$.

Άρα η σειρά της y αρχίζει από την m-οστή δύναμη του t

$$y(t) = t^{r_2+m}\, \sigma(t) = t^{r_1}\, \sigma(t) \quad \text{όπου } \sigma(\cdot) \text{ μιά δυναμοσειρά.}$$

Η παραπάνω λύση είναι η λύση y_1 που προσδιορίσαμε ήδη, πολλαπλασιασμένη με μία σταθερά. Γιατί αν $C_m(r_2) \neq 0$ διαιρώντας με $C_m(r_2)$ την λύση έχουμε $\tilde{C}_m(r_2) = 1 = \tilde{\tilde{C}}_0(r_2)$ οπότε η σειρά με $\tilde{\tilde{C}}_0(r_2) = 1$ της μορφής:

$$y(t) = t^{r_1} \frac{1}{} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\tilde{C}}_k(r_2)\, t^k$$

ταυτίζεται με την $y_1(\cdot)$.

Δεν παρουσιάζει λοιπόν η $y(\cdot)$ ιδιαίτερο ενδιαφέρον και για να προσδιορίσουμε μιά λύση που να συνδέεται με την r_2 παραγωγίζουμε:

$$\frac{\partial}{\partial r} L(\Psi)(t,r) = L\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}(t,r)\right) = q(r)\, t^r + (r - r_2)\left[q'(r) + q(r)\ln t\right] t^r$$

Θέτοντας $r = r_2$ η $y_2(t) = \dfrac{\partial \Psi(t, r_2)}{\partial r}$

είναι λύση (γιατί $L\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}(t,r_2) \right) = 0$) και έχει την μορφή:

$$y_2(t) = t^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} C_k'(r_2)\, t^k + (\ln t) \cdot t^{r_2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} C_k(r_2)\, t^k$$

όπου $C_0(r) = r - r_2$. Εφ' όσον $C_0(r_2) = \dots = C_{m-1}(r_2) = 0$ αυτή γράφεται:

$$y_2(t) = t^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} C_k'(r_2)\, t^k + c(\ln t)\, y_1(t) \quad , \quad c = C_m(r_2).$$

Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε για εύρεση λύσεων της

$$t^2 y'' + t\,\alpha(t)\, y' + b(t)\, y = 0$$

λέγεται μέθοδος του Frobenius.

Για $t<0$ αντικαθιστώντας το t με $-t$ παντού, δηλαδή τα $t^{r_1}, t^{r_2}\ln t$ με $|t|^{r_1}, |t|^{r_2}\ln|t|$ παίρνουμε αντίστοιχες λύσεις.

<u>Συνοψίζουμε όλες τις περιπτώσεις</u>:

Θεωρούμε την διαφ. εξίσωση: $t^2 y'' + t\,\alpha(t)\, y' + b(t)\, y = 0$
με $\alpha(\cdot), b(\cdot)$ αναλυτικές στο μηδέν.
Αν r_1, r_2 ρίζες του δεικτικού πολυωνύμου $q(r) = r(r-1) + r\alpha(0) + b(0)$ τότε (με $\mathrm{Re}\, r_1 \geq \mathrm{Re}\, r_2$) αν:

- $r_1 \neq r_2$, $r_2 - r_1 \notin \mathbb{N}$ υπάρχουν δύο γραμμ. ανεξάρτητες λύσεις που δίδονται από τις:

$$y_1(t) = |t|^{r_1} \cdot \sigma_1(t) \quad , \quad y_2(t) = |t|^{r_2} \sigma_2(t) \quad , \quad \sigma_1(0) = \sigma_2(0) = 1$$

όπου σ_1, σ_2 συγκλίνουσες δυναμοσειρές.

• $r_1 = r_2$ τότε $y_1(t) = |t|^{r_1} \sigma_1(t)$, $y_2(t) = |t|^{r_1+1} \sigma_2(t) + (\ln|t|)\, y_1(t)$

$\sigma_1(0) \neq 0$.

• $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}$ $y_1(t) = |t|^{r_1} \sigma_1(t)$

$$y_2(t) = |t|^{r_2} \sigma_2(t) + c(\ln|t|)\, y_1(t)$$, $\sigma_1(0) \neq 0$, $\sigma_2(0) \neq 0$

το c μπορεί να είναι μηδέν.

Άσκηση : Να δείξετε ότι οι δύο γραμμ. ανεξάρτητες λύσεις (που προκύπτουν από την παραπάνω ανάλυση των περιπτώσεων) είναι οι :

$$y_1(t) = |t|^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} t^k$$

$$y_2(t) = y_1(t) \ln|t| - 2|t|^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right) t^k$$

Η ΕΞΙΣΩΣΗ BESSEL

Η εξίσωση: $t^2y''+ty'+(t^2-\alpha^2)y=0$, $\alpha\geqslant 0$
όπου α σταθερά, λέγεται εξίσωση Bessel τάξης α.

Η εξίσωση Bessel είναι της μορφής $t^2y''+t\alpha(t)y'+b(t)y=0$
με $\alpha(t)=1$, $b(t)=t^2-\alpha^2$ οι οποίες είναι αναλυτικές στο $t=0$
και συνεπώς η Bessel έχει το μηδέν κανονικό ιδιάζον σημείο.
Το δεικτικό πολυώνυμο είναι:

$$q(r)=r(r-1)+r-\alpha^2=r^2-\alpha^2 \qquad \text{με ρίζες } r_1=\alpha,\ r_2=-\alpha$$

Υποθέτουμε, στην αναζήτηση λύσεων, ότι $t>0$.

Ακολουθούμε την μέθοδο του Frobenius αναζητώντας πρώτα λύση της μορφής $y_1(t)=t^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k$ $(c_0\neq 0)$

$$y_1'(t)=\alpha t^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k+t^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}kc_kt^{k-1}$$

$$y_1''(t)=\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k+\alpha t^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}kc_kt^{k-1}+\alpha t^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}kc_kt^{k-1}$$
$$+t^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)c_kt^{k-2}$$

$$t^2y_1''+ty'+(t^2-\alpha^2)y=0 \Rightarrow$$

$$\alpha(\alpha-1)t^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k+\alpha t^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}kc_kt^k+\alpha t^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}kc_kt^k+t^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)c_kt^k$$
$$+\alpha t^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k+t^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}kc_kt^k+t^{\alpha+2}\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k-\alpha^2t^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k=0$$

$$=(2\alpha+1)t^{\alpha+1}\cdot c_1+(2\alpha+1)t^\alpha\sum_{k=2}^{\infty}kc_kt^k+t^\alpha\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kt^k$$
$$+t^\alpha\sum_{k=2}c_{k-2}t^k=0$$

$$0\cdot c_0+(2\alpha+1)c_1t+\sum_{k=2}^{\infty}\left[(2\alpha k+\cancel{k}+k^2-\cancel{k})c_k+c_{k-2}\right]t^k=0$$

Άρα $c_1=0$

$$K(2\alpha+K)\cdot C_K + C_{K-2} = 0 \qquad \text{άρα } C_3=C_5=\cdots=0$$

$$C_K = -\frac{C_{K-2}}{K(2\alpha+K)} \qquad K=2,3,\ldots$$

$$C_2 = -\frac{C_0}{2(2\alpha+2)} = -\frac{C_0}{2^2(\alpha+1)}$$

$$C_4 = -\frac{C_2}{4(2\alpha+4)} = \frac{C_0}{2^4\cdot 2!\,(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

$$C_6 = -\frac{C_4}{6(2\alpha+6)} = -\frac{C_0}{2^6\, 3!\,(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}$$

$$C_{2K} = \frac{(-1)^K C_0}{2^{2K} K!\,(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+K)}$$

Άρα η λύση που αναζητούμε είναι:

$$y_1(t) = C_0 t^\alpha + C_0 t^\alpha \sum_{K=1}^{\infty} \frac{(-1)^K t^{2K}}{2^{2K} K!\,(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+K)}$$

Συνήθως επιλέγουμε $C_0 = \dfrac{1}{2^\alpha\cdot\Gamma(\alpha+1)}$

όπου $\Gamma(\cdot)$ η συνάρτηση γάμμα που ορίζεται

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1}\,dx \qquad \text{για } z>0$$

και για την οποία ισχύουν: $\Gamma(z+1) = z\cdot\Gamma(z)$

και αν $z\in\mathbb{N}$ τότε $\Gamma(z+1) = z!$

Εφ' όσον $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= z \cdot \Gamma(z) \\
\Gamma(z+2) &= (z+1)\,\Gamma(z+1) \\
\Gamma(z+3) &= (z+2)\,\Gamma(z+2) \\
&\vdots \\
\Gamma(z+N) &= (z+N-1)\,\Gamma(z+N-1)
\end{aligned}$$

$$\Gamma(z+N) = z(z+1)(z+2)\cdots(z+N-1)\,\Gamma(z)$$

Άρα $\Gamma(\alpha+1+k) = (\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\cdots(\alpha+k)\,\Gamma(\alpha+1)$

Η $y_1(\cdot)$ γράφεται:

$$y_1(t) = \frac{1}{2^\alpha\,\Gamma(\alpha+1)}\,t^\alpha + \frac{1}{2^\alpha\,\cancel{\Gamma(\alpha+1)}}\,t^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\,\cancel{\Gamma(\alpha+1)}}{2^{2k}\,k!\,\Gamma(\alpha+1+k)}\,t^{2k}$$

$$y_1(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} = J_\alpha(t)$$

Η λύση αυτή συμβολίζεται με $J_\alpha(\cdot)$ και λέγεται: συνάρτηση Bessel τάξης α (του πρώτου είδους)

Αν $\alpha = 0$ τότε $\Gamma(k+\alpha+1) = \Gamma(k+1) = k!$

και η:

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}$$

λέγεται συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξης (πρώτου είδους)

Αν $r_1 - r_2 = 2\alpha \notin \mathbb{N}$ τότε υπάρχει λύση της μορφής: $y_2(t) = t^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$

Αντικαθιστώντας το α με $-\alpha$ στους υπολογισμούς που κάναμε, παίρνουμε:

$$J_{-\alpha}(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k-\alpha+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}$$

'Ομως τα $\Gamma(k-\alpha+1)$ υπάρχουν για $k = 0, 1, 2, \ldots$ αρκεί το α να μην είναι φυσικός αριθμός.

[Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφέρουμε οτι η $\Gamma(\cdot)$ μπορεί να οριστεί και για αρνητικούς αρκεί να μην είναι ακέραιοι, με τον παρακάτω τρόπο:

'Εστω $z < 0$ και k ο θετικός ακέραιος για τον οποίο ισχύει:

$$-k < z \leq -k+1$$

τότε $z + k > 0$ οπότε:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+k)}{z(z+1)\cdots(z+k-1)}$$

Παράδειγμα: $\Gamma(-\frac{1}{2}) = \cancel{\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{(-\frac{1}{2})}} = \frac{\Gamma(1-\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2\Gamma(\frac{1}{2})$

(υπολογίζεται ότι $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$) άρα $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$

με τον ίδιο τρόπο $\Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$]

Άρα, όπως αναφέραμε τα $\Gamma(k-\alpha+1)$ υπάρχουν για $k=0,1,2,..$ αν $\alpha \notin \mathbb{N}$.

Συνεπώς η $J_{-\alpha}(\cdot)$ υπάρχει ακόμα κι αν $r_1-r_2=2\alpha \in \mathbb{N}$.

Γενικά, αν $\alpha \neq 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ τότε οι $J_\alpha(\cdot)$, $J_{-\alpha}(\cdot)$ αποτελούν ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων της Bessel τάξης α για $t>0$.

- Αν $\alpha=0$ αποδεικνύεται ότι η Bessel έχει δεύτερη λύση που δίνεται από την:

$$K_0(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)\left(\frac{t}{2}\right)^{2k} + (\ln t)\cdot J_0(t)$$

η οποία λέγεται συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξης, δευτέρου είδους.

- Αν $\alpha \in \mathbb{N}$ τότε (με $\alpha = \nu$) υπάρχει η $J_\nu(\cdot)$ και αποδεικνύεται οτι η δεύτερη λύση δίνεται από την:

$$K_\nu(t) = -\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^{-\nu}\sum_{i=0}^{\nu-1}\frac{(\nu-i-1)!}{i!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2i} - \frac{1}{2}\frac{1}{\nu!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\nu}\right)\left(\frac{t}{2}\right)^{\nu}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^{\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)!}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k+\nu}\right)\right]\left(\frac{t}{2}\right)^{2k} + (\ln t)\, J_\nu(t)$$

Η $K_\nu(\cdot)$ λέγεται συνάρτηση Bessel τάξης ν του δευτέρου είδους.

IX. ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε.

Η επίλυση μη γραμμικών Δ.Ε. είναι γενικά δύσκολη και γι αυτό εφαρμόζουμε συνήθως κάποια αριθμητική μέθοδο. Σε λίγες όμως περιπτώσεις οι μη γραμμικές μπορεί να αναχθούν σε γραμμικές.

Εξίσωση του Bernoulli

(1) $$y'(t) + p(t)\,y(t) = q(t)[y(t)]^{\mu}, \quad \mu \neq 1$$

Με τον μετασχηματισμό $z(t) = y(t)^{1-\mu}$ έχουμε:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt} = (1-\mu)\,y^{-\mu}\,y' \Rightarrow y' = \frac{1}{1-\mu}\,z'\,y^{\mu} \qquad (2)$$

επίσης $$y^{\mu} z = y \qquad (3)$$

Η (1) γράφεται (με βάση τις (2),(3))

$$\frac{1}{1-\mu}\,z'\,y^{\mu} + p\,z\,y^{\mu} = q\,y^{\mu}$$ δηλαδή

(4) $$z'(t) + (1-\mu)\,p(t)\,z(t) = q(t)\,(1-\mu)$$

συνεπώς η (1) ανάγεται στην (4) η οποία είναι γραμμική.

Παράδειγμα: $y'(t) - \frac{y(t)}{2t} = 5t^2[y(t)]^5$

Είναι εξίσωση Bernoulli. $z = y^{1-5} = y^{-4}$

$$z'(t) - 4\left(-\frac{1}{2t}\right)z(t) = 5t^2(-4)$$

$$z'(t) + \frac{2}{t}\,z(t) = 5t^2(-4) = -20t^2$$

$$z(t) = e^{-2\int\frac{dt}{t}}\left[c + \int(-20t^2)\, e^{2\int\frac{dt}{t}}\, dt\right] =$$

$$= e^{-2\ln t}\left[c - 20\int t^2 e^{\ln t^2}\right] = e^{-\ln t^2}\left[c - 20\int t^4 dt\right]$$

$$= \frac{1}{t^2}\left[c - 20\,\frac{1}{5}\,t^5\right] = \frac{1}{t^2}\left[c - 4t^5\right]$$

Άρα $\qquad y^4(t) = \dfrac{t^2}{c - 4t^5}$

Ασκήσεις: 1. $\; ty' + y = y^2 \ln t$

2. $\; y' + 2ty = 2t^3 y^3$

Εξίσωση του Riccati

(1) $\qquad y'(t) + p(t)\, y^2(t) + q(t)\, y(t) + r(t) = 0$

Για να προσδιορίσουμε την γενική λύση της (1) είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε μία μερική λύση της, την $y_1(\cdot)$.
Τότε με τον μετασχηματισμό $y = y_1 + z$ έχουμε:

$$y_1' + z' + p y_1^2 + 2p y_1 z + p z^2 + q y_1 + q z + r = 0$$
$$(y_1' + p y_1^2 + q y_1 + r) + z' + 2p y_1 z + q z + p z^2 = 0$$

$$z' + (2p y_1 + q) z = -p z^2$$ η οποία είναι εξίσωση Bernoulli

$$\varphi = z^{-1} \Rightarrow \varphi' = -\frac{1}{z^2} z' \Rightarrow z' = -z^2 \varphi'$$

$$-z^2 \varphi' + (2p y_1 + q) z^2 \varphi = -p z^2$$

$$\varphi' - (2p y_1 + q)\varphi = p$$

οπότε $\qquad \varphi(t) = e^{\int (2p y_1 + q) dt} \left[c + \int p(t)\, e^{-\int (2p y_1 + q) dt} dt \right]$

Άρα $\qquad y = y_1 + \dfrac{e^{-\int (2p y_1 + q) dt}}{c + \int p(t)\, e^{-\int (2p y_1 + q) dt} dt} \qquad (2)$

Παράδειγμα: $\quad y' - \frac{t-1}{2t^2} y^2 - \frac{1}{t} y + \frac{t-1}{2} = 0 \quad$ με $y_1(t) = t$

$y_1 + z = y \quad$ άρα $\quad y = t + z$

$$1 + z' - \frac{t-1}{2t^2}(t^2 + 2tz + z^2) - \frac{1}{t}(t+z) + \frac{t-1}{2} = 0$$

$$\cancel{1} + z' - \frac{t-\cancel{1}}{\cancel{2}} - z\frac{t-1}{t} - z^2 \frac{t-1}{2t^2} - \cancel{1} - \frac{z}{t} + \frac{t-\cancel{1}}{\cancel{2}} = 0$$

$$z' - z + \cancel{\frac{z}{t}} + z^2 \frac{1-t}{2t^2} - \cancel{\frac{z}{t}} = 0 \qquad (3)$$

Η (3) είναι εξίσωση Bernoulli, οπότε με $\varphi = z^{-1}$ και εφόσον $\varphi' = -\frac{1}{z^2} z' \Rightarrow z' = -z^2\varphi'$ και $z^2\varphi = z$

$$-z^2\varphi' - z^2\varphi + z^2\frac{1-t}{2t^2} = 0 \Rightarrow \varphi' + \varphi = \frac{1-t}{2t^2}$$

$$\varphi(t) = e^{-t}\left[c + \int \frac{1-t}{2t^2} e^t dt\right]$$

$$\int \frac{1-t}{2t^2} e^t dt = \frac{1}{2}\int t^{-2}e^t dt - \frac{1}{2}\int t^{-1}e^t dt$$

$$\int t^{-1}e^t dt = t^{-1}e^t - \int\left(-\frac{1}{t^2}\right)e^t dt = t^{-1}e^t + \int t^{-2}e^t dt$$

άρα $\displaystyle\int \frac{1-t}{2t^2} e^t dt = -\frac{1}{2}t^{-1}e^t$

$$\varphi(t) = e^{-t}\left[c - \frac{1}{2}t^{-1}e^t\right]$$

άρα $\displaystyle z(t) = \frac{2e^t t}{2ct - e^t}$

και $\displaystyle y(t) = t + t\,\frac{2e^t}{2ct - e^t} = t\,\frac{2ct + e^t}{2ct - e^t}$

και επειδή c αυθαίρετο, $\displaystyle y(t) = t\,\frac{ct + e^t}{ct - e^t}$

<u>Σημείωση:</u> Είναι, σχεδόν πάντοτε, προτιμότερο να επαναλαμβάνουμε την διαδικασία που ακολουθήσαμε για να λύσουμε την γενική μορφή της Riccati (καταλήγοντας στην (2)) σε κάθε συγκεκριμένη Riccati. Η απλή αντικατάσταση των $p(\cdot), q(\cdot), y_1(\cdot)$ στην (2) οδηγεί σε υπολογισμούς ολοκληρωμάτων που είναι δυσκολότεροι από αυτούς που προκύπτουν κατά την επίλυση της γραμμικής στην οποία καταλήγουμε.

Ασκήσεις: 1) $ty' - y^2 + 2(t-1)y = t(t-1)$ $y_\mu(t) = t$

2) $y' + y^2 = \frac{2}{t^2}$, $y_\mu(t) = \frac{\alpha}{t}$

ΙΔΙΑΖΟΥΣΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πολλές φορές μιά λύση της Δ.Ε. της μορφής:

$$F(t,y,y')=0 \qquad (1)$$

ικανοποιεί και την $\dfrac{\partial F}{\partial y'}=0$. Τότε η λύση αυτή λέγεται ιδιάζουσα.

<u>Παράδειγμα:</u> $ty'+y'^2-y=0$. Η $y=-\dfrac{t^2}{4}$ είναι λύση της Δ.Ε.

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=t+2y'=0 \quad \text{και η } y=-\frac{t^2}{4} \text{ ικανοποιεί}$$

την $\dfrac{\partial F}{\partial y'}=0$ συνεπώς είναι μιά ιδιάζουσα λύση της Δ.Ε.

Οι ιδιάζουσες λύσεις μιάς Δ.Ε. προσδιορίζονται ως εξής: Θέτουμε $p=y'$ και θεωρούμε τις εξισώσεις:

$$F(t,y,p)=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial p}=0 \qquad (3)$$

Με απαλοιφή του p από τις (2),(3) παίρνουμε μια εξίσωση της μορφής: $g(t,y)=0$. Αν μιά y που ορίζεται απο την $g(t,y)=0$ είναι λύση της (1) τότε η y είναι μιά ιδιάζουσα λύση της (1).

<u>Παράδειγμα:</u> $ty'^2-2yy'+t+2y=0 \qquad (4)$

$$F(t,y,p)=tp^2-2yp+t+2y$$

$$\frac{\partial F}{\partial p}=2pt-2y=0$$

$p = \frac{y}{t}$ άρα $t\frac{y^2}{t^2} - 2y\frac{y}{t} + t + 2y = 0$

$\frac{y^2}{t} - \frac{2y^2}{t} + t + 2y = 0 \Rightarrow -\frac{y^2}{t} + t + 2y = 0$

$\Rightarrow -y^2 + t^2 + 2yt = 0 \Rightarrow (t+y)^2 = 2y^2 \Rightarrow t + y = \pm y\sqrt{2}$

Η $y_1(t) = \frac{t}{\sqrt{2}-1} = t(\sqrt{2}+1)$ είναι λύση της (4)

η $y_2(t) = \frac{-t}{\sqrt{2}+1} = (1-\sqrt{2})t$ είναι λύση της (4)

άρα η καμπύλη $-y^2 + t^2 + 2yt = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της (4).

Εξίσωση του Clairaut

$$y = y' \cdot t + f(y') \qquad (5)$$

Παραγωγίζοντας ως προς t, αφού πρώτα θέσουμε $y' = p$ έχουμε:

$$p = p't + p + f'(p) \cdot p' \Rightarrow$$

$$p'(t + f'(p)) = 0$$

- Αν $p' = 0$ τότε $p = c \Rightarrow y = ct + \beta$ και αντικαθιστώντας στην (5) $ct + \beta = ct + f(c) \Rightarrow \beta = f(c)$
  Άρα $y(t) = ct + f(c)$ η οποία είναι η γενική λύση της (5) και παριστάνει μια μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών.

- Αν $t + f'(p) = 0$ (6) τότε η $y = p \cdot t + f(p)$ γίνεται $y = -pf'(p) + f(p)$ (7). Με απαλοιφή του p από τις (6), (7) παίρνουμε την ιδιάζουσα λύση της (5).

<u>Παράδειγμα:</u> $y = ty' + \frac{1}{y'}$

Έχουμε $f(y') = \frac{1}{y'}$. Έχει γενική λύση $y(t) = ct + \frac{1}{c}$.

η $t + f'(p) = 0$ είναι: $t - \frac{1}{p^2} = 0$ (8)

η $y = -pf'(p) + f(p)$ είναι: $y = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p}$ (9)

Με απαλοιφή του p από τις (8),(9) έχουμε:

$t - \frac{y^2}{4} = 0 \Rightarrow y^2 = 4t$ που είναι η ιδιάζουσα

λύση της $y = ty' + \frac{1}{y'}$.

- Η ιδιάζουσα λύση μπορεί να βρεθεί και ως εξής: Παραγωγίζοντας την γενική λύση $y = ct + f(c)$ <u>ως προς c</u> έχουμε $0 = t + f'(c)$. Με απαλοιφή του c από τις δύο αυτές εξισώσεις καταλήγουμε στην ιδιάζουσα λύση.

<u>Ασκήσεις</u>

Να βρεθούν οι γενικές και οι ιδιάζουσες λύσεις των:

1. $y = ty' + y' - y'^2$
2. $y + \ln y' = ty'$
3. $y'^2 + (t-2)y' - y + 1 = 0$
4. $y = ty' + y'^2$
5. Έχει μιά Δ.Ε. $y' + \alpha(t)y = b(t)$ ιδιάζουσες λύσεις;

Εξίσωση του Lagrange

Είναι η Δ.Ε. της μορφής: $y = t\varphi(y') + \psi(y')$ (1)

- Αν $\varphi(y') = y'$ έχουμε την εξίσωση Clairaut, δηλαδή η εξίσωση Clairaut είναι μιά ειδική περίπτωση της εξίσωσης Lagrange. Υποθέτουμε λοιπόν οτι $\varphi(p) \neq p$

Θέτοντας $y' = p$ και παραγωγίζοντας την (1) ως προς t έχουμε: $p = \varphi(p) + t\varphi'(p)\cdot p' + \psi'(p)\cdot p'$ $\Rightarrow$

$$p - \varphi(p) = p'\left(t\varphi'(p) + \psi'(p)\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p - \varphi(p)}{t\varphi'(p) + \psi'(p)} \Rightarrow \frac{dt}{dp} = t\frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} + \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}t = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} \qquad (2)$$

Η (2) είναι γραμμική ως προς $t = t(p)$ οπότε προσδιορίζουμε την γενική λύση της $t = t(p, c)$

Με απαλοιφή της παραμέτρου p απο τις:

$$t = t(p, c)$$
$$y = t\varphi(p) + \psi(p)$$

προκύπτει η μή παραμετρική γενική λύση της Lagrange.

- Αν η $p = \varphi(p)$ έχει λύση p_0 τότε η $y = p_0\cdot t + \psi(p_0)$ είναι λύση και πολλές φορές ιδιάζουσα λύση της (1).

<u>Παράδειγμα:</u> $y = t + y'^2 - \frac{2}{3}y'^3$ (3)

Είναι εξίσωση Lagrange με $\varphi(y') = 1$, $\psi(y') = y'^2 - \frac{2}{3}y'^3$
θέτουμε $y' = p$ και η (3) γίνεται:

$$y = t + p^2 - \frac{2}{3}p^3 \quad (4)$$

παραγωγίζοντας (ως προς t) $p = y' = 1 + 2pp' - 2p^2p'$ $\Rightarrow$

$$(p-1) = 2pp'(1-p) \Rightarrow (p-1)(1+2pp') = 0$$

άρα $p = 1$, $1 + 2pp' = 0$

- αν $p = 1$ από την (3) έχουμε $y(t) = t + \frac{1}{3}$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 2p - 2p^2 = 2p(1-p) \qquad \text{η } p = y' = 1 \text{ επαληθεύει } \frac{\partial F}{\partial p} = 0$$

άρα η $y(t) = t + \frac{1}{3}$ είναι ιδιάζουσα λύση της (3).

- αν $2pp' + 1 = 0 \Rightarrow 2p\frac{dp}{dt} = -1 \Rightarrow 2p\,dp = -dt$

$$\Rightarrow 2\,\frac{1}{2}p^2 = -t + c \Rightarrow t = -p^2 + c \quad (5)$$

αντικαθιστώντας την (5) στην (4) έχουμε:

$$y = c - \frac{2}{3}p^3 \quad (6)$$ και με απαλοιφή του p από τις
(5), (6):

$$(3y - \cancel{3}c)^2 = 4(c-t)^3 = 9(y-c)^2$$

η οποία είναι η γενική λύση της (3).

<u>Ασκήσεις:</u> 1. $y = 2ty' + \frac{1}{y'}$

2. $y = y'^2 e^{y'}$ 3. $y = t(1+y') + y'^2$