X. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Μιά <u>απεικόνιση</u> ή <u>μετασχηματισμός</u> (συναρτησιακός) από έναν χώρο συναρτήσεων σε κάποιον άλλο χώρο συναρτήσεων είναι μιά γενικευμένη συνάρτηση η οποία αντιστοιχίζει σημεία (συναρτήσεις) f του ενός χώρου σε σημεία g (συναρτήσεις) του άλλου χώρου. Η απεικόνιση αυτή (ή ο μετασχηματισμός) μπορεί να συμβολίζεται με A, οπότε έχουμε:

$$A(f)=g\ .$$

Αν ο μετασχηματισμός A έχει την ιδιότητα:

$$A(\lambda f_1+\mu f_2)=\lambda A(f_1)+\mu A(f_2)$$

τότε ο A λέμε ότι είναι ένας <u>γραμμικός μετασχηματισμός.</u>

'Ενας γραμμικός συναρτησιακός μετασχηματισμός της μορφής:

$$A(f)=g \quad \text{όπου} \quad g(s)=\int_{\alpha}^{b} K(s,t)\,f(t)\,dt$$

με $\alpha, b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ λέγεται <u>ολοκληρωτικός.</u>

(Υποθέτουμε ότι f συνεχής και $K(\cdot,\cdot)$ συνεχής.)

'Ενας ολοκληρωτικός μετασχηματισμός που είναι χρήσιμος στις εφαρμογές είναι ο μετασχηματισμός Laplace.
Ορίζεται από το ολοκλήρωμα:

$$\mathcal{L}(f(t))=\bar{f}(s)=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

όπου s πραγματική μεταβλητή (γενικότερα μιγαδική).

Θυμίζουμε ότι $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^{T} e^{-st} f(t)dt$.

Η γραμμικότητα του μετασχηματισμού Laplace αποδεικνύεται εύκολα. (Αποδείξτε)

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό μπορούμε να υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς Laplace ορισμένων απλών συναρτήσεων.

(α) $f(t)=1$ (ορισμένη στο $(0,+\infty)$)

$$\mathcal{L}(1) = \int_0^{\infty} e^{-st}\cdot 1\cdot dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^{T} e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^T =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{s}\left(1-e^{-sT}\right) = \begin{cases} \frac{1}{s} & \text{αν } s>0 \\ +\infty & \text{αν } s<0 \end{cases}$$

αν $s=0$ $\int_0^{\infty} e^{-st}dt = \int_0^{\infty} dt = +\infty$

Άρα το $\int_0^{\infty} e^{-st}dt$ συγκλίνει μόνον για $s>0$.

Λέμε λοιπόν ότι $\mathcal{L}(1) = \int_0^{\infty} e^{-st}\cdot 1\cdot dt = \frac{1}{s}$ όπου $s>0$

για να συγκλίνει το ολοκλήρωμα.

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε:

(β) $f(t)=e^{\alpha t}$, $\mathcal{L}(e^{\alpha t}) = \int_0^{\infty} e^{-st}e^{\alpha t}dt = \frac{1}{s-\alpha}$

όπου $s>\alpha$

(γ) $f(t)=\eta\mu\alpha t$, $\mathcal{L}(\eta\mu\alpha t) = \int_0^{\infty} e^{-st}\eta\mu\alpha t\, dt = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$

όπου $s>0$

(δ) $f(t) = \sigma\upsilon\nu\alpha t$, $\mathcal{L}(\sigma\upsilon\nu\alpha t) = \int_0^\infty e^{-st}\sigma\upsilon\nu\alpha t\,dt = \dfrac{s}{s^2+\alpha^2}$

με $s>0$.

(ε) $f(t) = t^\nu$, $\nu = 1,2,3,\ldots$ $\mathcal{L}(t^\nu) = \int_0^\infty e^{-st}t^\nu\,dt = \dfrac{\nu!}{s^{\nu+1}}$

με $s>0$

(ζ) $f(t) = \eta\mu h\alpha t$, $\mathcal{L}(\eta\mu h\alpha t) = \int_0^\infty e^{-st}\eta\mu h\alpha t\,dt = \dfrac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$

με $s>\alpha$

(η) $f(t) = \sigma\upsilon\nu h\alpha t$, $\mathcal{L}(\sigma\upsilon\nu h\alpha t) = \int_0^\infty e^{-st}\sigma\upsilon\nu h\alpha t\,dt = \dfrac{s}{s^2-\alpha^2}$

με $s>\alpha$

- με χρήση των (α),(β),(γ),(δ),(ε),(ζ),(η) και της γραμμικότητας της $\mathcal{L}(\cdot)$ μπορούμε να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace συνθετότερων συναρτήσεων: π.χ. $f(t) = t^2+2t-3$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(t^2+2t-3) = \mathcal{L}(t^2)+2\mathcal{L}(t)-3\mathcal{L}(1) = \frac{2!}{s^3}+2\frac{1!}{s^2}-3\frac{1}{s}$$

$$= \frac{2+2s-3s^2}{s^3}$$

<u>Θεώρημα Μετατόπισης</u> : Αν $\bar{f}(s) = \mathcal{L}(f(t))$ τότε

$$\bar{f}(s+\alpha) = \mathcal{L}(e^{-\alpha t}f(t)) \quad \text{όπου } \alpha\in\mathbb{R}.$$

Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τον ορισμό:

$$\mathcal{L}(e^{-\alpha t}f(t)) = \int_0^\infty e^{-st}e^{-\alpha t}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+\alpha)t}f(t)\,dt = \bar{f}(s+\alpha)$$

Χρησιμοποιούμε το θεώρημα μετατόπισης για να υπολογίσουμε μετασχηματισμούς Laplace συναρτήσεων της μορφής: $e^{-\alpha t}f(t)$ όταν ο $\mathcal{L}(f(t))$ είναι γνωστός.

<u>Παράδειγμα:</u> Γνωρίζουμε ότι: $\mathcal{L}(t^{\nu}) = \dfrac{\nu!}{s^{\nu+1}} = \bar{f}(s)$

Σύμφωνα με το θεώρημα μετατόπισης,

$$\mathcal{L}(t^{\nu}e^{-\alpha t}) = \bar{f}(s+\alpha) = \frac{\nu!}{(s+\alpha)^{\nu+1}} \quad (s>-\alpha)$$

<u>Παράδειγμα:</u> Γνωρίζουμε ότι: $\mathcal{L}(\eta\mu\beta t) = \dfrac{\beta}{s^2+\beta^2} = \bar{f}(s)$, $(s>0)$

Σύμφωνα με το θεώρημα μετατόπισης:

$$\mathcal{L}(e^{-\alpha t}\eta\mu\beta t) = \bar{f}(s+\alpha) = \frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}, \quad (s>-\alpha)$$

Ως τώρα υποθέτουμε οτι η συνάρτηση f είναι τέτοια ώστε να υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace. Μπορούμε να ορίσουμε μιά κλάση συναρτήσεων για τις οποίες υπάρχει ο $\mathcal{L}(f(t))$.

Θεωρούμε το σύνολο K_e των κατά τμήματα συνεχών συναρτήσεων f, για τις οποίες υπάρχει (για κάθε f) $M \geq 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $|f(t)| < Me^{\alpha t}$ $\forall\, t \in [0,+\infty)$.
Τότε αν $f \in K_e$ υπάρχει ο $\mathcal{L}(f(t))$, (για $s>\alpha$)

- μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι συναρτήσεις πού έχουμε συναντήσει ως τώρα ανήκουν στο K_e. Όμως η κλάση των συναρτήσεων για τις οποίες υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace είναι ευρύτερη. Η συνάρτηση $\frac{1}{\sqrt{t}}$ π.χ. δεν ανήκει στο K_e αλλά έχει μετ. Laplace.

<u>Συνελικτικό Θεώρημα:</u> Αν $f, g \in K_e$ τότε:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right) = \mathcal{L}(f(t)) \cdot \mathcal{L}(g(t))$$

Αν στο προηγούμενο θεώρημα θέσουμε $f(\cdot) \equiv 1$ προκύπτει το θεώρημα ολοκληρώσεως:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t g(\tau)d\tau\right) = \mathcal{L}(1)\cdot\mathcal{L}(g(t)) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(g(t))$$

Δίνουμε τώρα τον ακόλουθο πίνακα μετασχηματισμών Laplace:

$f(t)$	$\bar{f}(s) = \mathcal{L}(f(t))$
1	$\frac{1}{s}$ $\quad s>0$
t^{ν} $\quad \nu=1,2,3,..$	$\frac{\nu!}{s^{\nu+1}}$ $\quad s>0$
$e^{\alpha t}$ $\quad \alpha\neq 0$	$\frac{1}{s-\alpha}$ $\quad s>\alpha$
$\eta\mu\alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$ $\quad s>0$
$\sigma\upsilon\nu\alpha t$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$ $\quad s>0$
$\sigma\upsilon\nu h\alpha t$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$ $\quad s>\alpha$
$\eta\mu h\alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$ $\quad s>\alpha$
$t^{\nu}e^{-\alpha t}$ $\quad \nu=1,2,3,..$	$\frac{\nu!}{(s+\alpha)^{\nu+1}}$ $\quad s>-\alpha$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$ $\quad s>0$
$\sqrt{t}$	$\frac{1}{2s}\sqrt{\frac{\pi}{s}}$ $\quad s>0$
$t\,\eta\mu\alpha t$	$\frac{2\alpha s}{(s^2+\alpha^2)^2}$ $\quad s>0$
$e^{-\alpha t}\eta\mu\beta t$	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$ $\quad s>-\alpha$
$e^{-\alpha t}\sigma\upsilon\nu\beta t$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$ $\quad s>-\alpha$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς Laplace παραγώγων συναρτήσεων με βάση το ακόλουθο:

<u>Θεώρημα Παραγώγισης</u> : $\mathcal{L}(y'(t)) = -y(0) + s\bar{y}(s)$

Απόδειξη: $\int_0^T e^{-st} y'(t)\,dt = e^{-st} y(t)\Big]_0^T - \int_0^T (-s) e^{-st} y(t)\,dt$

$= e^{-sT} y(T) - y(0) + s\cdot\int_0^T e^{-st} y(t)\,dt$, υποθέτοντας οτι η $y(\cdot)$ είναι τέτοια ώστε $\lim_{T\to\infty} e^{-sT} y(T) = 0$ έχουμε: (για $s>0$)

$$\int_0^\infty e^{-st} y'(t)\,dt = -y(0) + s\cdot\int_0^\infty e^{-st} y(t)\,dt$$

άρα $\mathcal{L}(y'(t)) = -y(0) + s\bar{y}(s) = -y(0) + s\mathcal{L}(y(t))$ $\quad (*)$

Αν στη θέση της $y(\cdot)$ χρησιμοποιήσουμε την $y'(\cdot)$ η $(*)$ δίνει:

$$\mathcal{L}(y''(t)) = -y'(0) + s\mathcal{L}(y'(t)) = -y'(0) + s(-y(0) + s\mathcal{L}(y(t)))$$

$$= -y'(0) - s\,y(0) + s^2\bar{y}(s)$$

Γενικά :

$$\mathcal{L}(y^{(\nu)}(t)) = s^\nu \bar{y}(s) - s^{\nu-1} y(0) - s^{\nu-2} y'(0) - \cdots - s\,y^{(\nu-2)}(0) - y^{(\nu-1)}(0)$$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace ορίζεται από την ισοδυναμία: $\mathcal{L}^{-1}(\bar{f}(s)) = f(t) \Leftrightarrow \mathcal{L}(f(t)) = \bar{f}(s)$
(με την προϋπόθεση ότι ο $\mathcal{L}^{-1}$ ορίζεται μονοσήμαντα)

Άρα, λόγω της γραμμικότητας του $\mathcal{L}$, ο $\mathcal{L}^{-1}$ είναι γραμμικός δηλαδή:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\alpha\bar{f}(s) + \beta\bar{g}(s)\right) = \alpha\mathcal{L}^{-1}(\bar{f}(s)) + \beta\mathcal{L}^{-1}(\bar{g}(s))$$

Στην πράξη οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί βρίσκονται από τους πίνακες μετασχηματισμών Laplace.

<u>Παράδειγμα:</u> $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$ άρα $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s}) = 1$

$$\mathcal{L}(\text{συν}\alpha t) = \frac{s}{s^2+\alpha^2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+\alpha^2}\right) = \text{συν}\alpha t$$

Όταν ο $\bar{f}(s)$ είναι ρητή συνάρτηση του s αλλα δεν είναι μιά από τις μορφές του πίνακα τότε μπορούμε (συνήθως) να τον εκφράσουμε με μερικά κλάσματα που το καθένα είναι μιά από τις γνωστές μορφές του πίνακα.

<u>Παράδειγμα:</u> Για να υπολογίσουμε τον $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}\right)$ γράφουμε το $\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{-1}{s+\alpha} + \frac{1}{s+\beta}\right)$ (με $\alpha \neq \beta$)

οπότε $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}\right) = -\frac{1}{\alpha-\beta}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha-\beta}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+\beta}\right)$

$$= -\frac{1}{\alpha-\beta}e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha-\beta}e^{-\beta t} = \frac{1}{\beta-\alpha}\left(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\right)$$

Παράδειγμα: $\dfrac{s}{(s^2+\alpha^2)(s^2+\beta^2)} = \dfrac{1}{\beta^2-\alpha^2}\left(\dfrac{s}{s^2+\alpha^2} - \dfrac{s}{s^2+\beta^2}\right)$ (με $\beta^2 \neq \alpha^2$)

οπότε: $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{(s^2+\alpha^2)(s^2+\beta^2)}\right) = \dfrac{1}{\beta^2-\alpha^2}\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{s^2+\alpha^2}\right) - \dfrac{1}{\beta^2-\alpha^2}\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{s^2+\beta^2}\right)$

$$= \frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\,\text{συν}\,\alpha t - \frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\,\text{συν}\,\beta t = \frac{1}{\beta^2-\alpha^2}(\text{συν}\alpha t - \text{συν}\beta t)$$

Παράδειγμα: $\dfrac{1}{s^2(s^2+\alpha^2)} = \dfrac{1}{\alpha^2}\left(\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s^2+\alpha^2}\right)$, $\alpha \neq 0$, οπότε:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+\alpha^2)}\right) = \frac{1}{\alpha^2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) - \frac{1}{\alpha^2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\alpha^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}t - \frac{1}{\alpha^3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\right) = \frac{t}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^3}\,\text{ημ}\,\alpha t$$

Δύο προτάσεις που διευκολύνουν τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace ορισμένων συναρτήσεων είναι οι ακόλουθες:

Πρόταση: (πολλαπλασιασμού) $\quad \bar{f}^{(\nu)}(s)\cdot(-1)^\nu = \mathcal{L}(t^\nu f(t))$

Πρόταση: (διαιρέσεως) $\quad \mathcal{L}\left(\frac{1}{t}f(t)\right) = \int_s^\infty \bar{f}(\sigma)\,d\sigma$

Ασκήσεις: 1. Δείξτε ότι: α) $\mathcal{L}(\alpha+\beta t) = \dfrac{\alpha s+\beta}{s^2}$ β) $\mathcal{L}(t^{-\frac{1}{2}}) = \sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$

γ) $\mathcal{L}(t\,\text{συν}\alpha t) = \dfrac{s^2-\alpha^2}{(s^2+\alpha^2)^2}$ δ) $\mathcal{L}(e^{\alpha t}t^{-\frac{1}{2}}(1+2\alpha t)) = \dfrac{s\sqrt{\pi}}{(s-\alpha)^{3/2}}$

2. Υπολογίστε τον $\mathcal{L}^{-1}(f(s))$ όταν ο $\bar{f}(s)$ είναι: α) $\dfrac{s^2}{(s^2+1)(s^2+2)}$ β) $\dfrac{1}{s(s-1)^3}$

3. Υπολογίστε τους $\mathcal{L}\left(\dfrac{\text{ημ}t}{t}\right)$, $\mathcal{L}\left(\dfrac{1-\text{συν}t}{t}\right)$, $\mathcal{L}\left(\dfrac{e^{\alpha t}-e^{\beta t}}{t}\right)$

4. Υπολογίστε τον $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{(s^2+\alpha^2)^2}\right)$.

Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων με χρήση του Μετασχηματισμού Laplace

Ας θεωρήσουμε την γραμμική Δ.Ε. :

$$(1) \quad \alpha_\nu(t)\, y^{(\nu)}(t) + \alpha_{\nu-1}(t)\, y^{(\nu-1)}(t) + \cdots + \alpha_1(t)\, y'(t) + \alpha_0(t)\, y(t) = f(t)$$

όπου f συνεχής σε διάστημα I και $\alpha_0, \alpha_1, .., \alpha_\nu$ πολυώνυμα το πολύ $\nu-1$ βαθμού.

Αν εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό Laplace στην (1) παίρνουμε μία γραμμική δ.ε. ως προς $\bar{y}(s) = \mathcal{L}(y(t))$, μ τάξεως όπου μ ο μέγιστος βαθμός των πολυωνύμων $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\nu$.

Γενικά $\mu \leq \nu-1$ οπότε η ως προς $\bar{y}(\cdot)$ δ.ε. είναι μικρότερης τάξης από την (1) και συνεπώς ευκολότερη στην επίλυσή της.

Π.χ. αν η (1) έχει σταθερούς συντελεστές, $\mu=0$ οπότε με εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace προκύπτει μια αλγεβρική εξίσωση ως προς $\bar{y}(s)$.

Εάν λύσουμε την ως προς $\bar{y}(s)$ δ.ε. με εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace βρίσκουμε την λύση της (1)

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(\bar{y}(s))$$

- Είναι σαφές ότι για την εφαρμογή της μεθόδου αυτής υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Laplace της y και των παραγώγων της μέχρι ν-τάξης και γενικά όσων συναρτήσεων απαιτείται να υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς Laplace. Επειδή η ισχύς της υποθέσεως αυτής είναι δύσκολο να ελεγχθεί είναι προτιμότερο να ελέγχουμε αν η λύση της δ.ε. στην οποία καταλήξαμε επαληθεύει την διαφ. εξίσωση.

Παράδειγμα: $y'(t) + 2y(t) = \sigma\upsilon\nu t$, $y(0)=1$

$$\mathcal{L}(y'(t) + 2y(t)) = \mathcal{L}(\sigma\upsilon\nu t) \Rightarrow s\bar{y}(s) - y(0) + 2\bar{y}(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

λύνοντας ως προς $\bar{y}(s)$ βρίσκουμε: $\bar{y}(s) = \dfrac{s}{(s+2)(s^2+1)} + \dfrac{y(0)}{s+2}$

και εφ' όσον $y(0)=1$

$$\bar{y}(s) = \frac{s}{(s+2)(s^2+1)} + \frac{1}{s+2}$$

Επιδιώκουμε την ανάλυση του $\frac{s}{(s+2)(s^2+1)}$ σε κλάσματα, δηλαδή

$$\frac{s}{(s+2)(s^2+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$ και κατά τα γνωστά

$A=-B=-\frac{2}{5}$, $C=\frac{1}{5}$ οπότε :

$$\bar{y}(s) = -\frac{2}{5}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{5}\frac{2s+1}{s^2+1} + \frac{1}{s+2} = \frac{3}{5}\frac{1}{s+2} + \frac{2}{5}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{5}\frac{1}{s^2+1}$$

Άρα $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(\bar{y}(s)) = \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) + \frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$

$$y(t) = \frac{3}{5}e^{-2t} + \frac{2}{5}\text{συν}t + \frac{1}{5}\text{ημ}t$$

<u>Παράδειγμα:</u> $y''(t) + \alpha^2 y(t) = \text{ημ}\beta t \qquad \alpha\neq\beta\ ,\ \alpha\neq 0$

$$\mathcal{L}\left(y''(t)+\alpha^2 y(t)\right) = \mathcal{L}(\text{ημ}\beta t) \Rightarrow s^2\bar{y}(s) - s\,y(0) - y'(0) + \alpha^2\bar{y}(s) = \frac{\beta}{s^2+\beta^2}$$

$$\Rightarrow \bar{y}(s) = \frac{\beta}{(s^2+\alpha^2)(s^2+\beta^2)} + \frac{s\,y(0)}{s^2+\alpha^2} + \frac{y'(0)}{s^2+\alpha^2}$$

$$\Rightarrow \bar{y}(s) = \frac{\beta}{\beta^2-\alpha^2}\left(\frac{1}{s^2+\alpha^2} - \frac{1}{s^2+\beta^2}\right) + y(0)\frac{s}{s^2+\alpha^2} + \frac{y'(0)}{\alpha}\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$$

με αντιστροφή έχουμε:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(\bar{y}(s)) = \frac{\beta}{\beta^2-\alpha^2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\alpha^2}\right) - \frac{\beta}{\beta^2-\alpha^2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\beta^2}\right) + y(0)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+\alpha^2}\right)$$

$$+ \frac{y'(0)}{\alpha}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\right)$$

$$= \frac{\beta}{\alpha(\beta^2-\alpha^2)}\text{ημ}\alpha t - \frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\text{ημ}\beta t + y(0)\,\text{συν}\alpha t + \frac{y'(0)}{\alpha}\text{ημ}\alpha t$$

Θεωρώντας τα $\frac{1}{\alpha}\left(y'(0) + \frac{\beta}{\beta^2-\alpha^2}\right)$, $y(0)$ ως αυθαίρετες σταθερές c_1, c_2 , (εφ' όσον τα $y(0)$, $y'(0)$ μπορούν να πάρουν οποιεσδήποτε τιμές) έχουμε την γενική λύση: $y(t) = c_1\text{ημ}\alpha t + c_2\text{συν}\alpha t - \frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\text{ημ}\beta t$

Ασκήσεις

1. Να λυθούν με την μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών:

α) $y' + y = 3e^{2t}$, $y(0)=0$

b) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0)=0$, $y'(0)=3$

c) $y'' + 2y' + 2y = 2$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

d) $y'' + y' = 3t^2$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

e) $y'' + 2y' + 5y = 3e^{-t}\eta\mu t$, $y(0)=0$, $y'(0)=3$

2. Βρείτε τη λύση της $y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0$ (με μετασχημ. Laplace)

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Οι μερικές δ.ε. αποτελούν ένα ξεχωριστό αντικείμενο, που η πλήρης ανάπτυξή του ξεπερνά τους στόχους ενός πρώτου μαθήματος στις διαφορικές εξισώσεις. Εδώ θα ασχοληθούμε με ορισμένες ειδικές μορφές μ.δ.ε (γραμμικών) που εμφανίζονται στις εφαρμογές.

Μερική Δ.Ε. λέγεται μια εξίσωση που περιλαμβάνει μερικές παραγώγους μιάς άγνωστης συνάρτησης. Η τάξη της είναι (όπως και στις συνήθεις δ.ε. η τάξη της μερικής παραγώγου μεγαλύτερης τάξης.

Π.χ. η $$y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2u$$

είναι μιά γραμμική μ.δ.ε. πρώτης τάξης. Γραμμική με την έννοια ότι η u και οι παράγωγοί της εμφανίζονται στον πρώτο βαθμό.

η $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ είναι μιά γραμμική μ.δ.ε. $2^{ης}$ τάξης.

η $$u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = u^2$$ είναι μιά μη γραμμική μ.δ.ε.

Είδαμε στην θεωρία των συνήθων δ.ε. οτι η γενική λύση μιας σ.δ.ε. περιλαμβάνει αυθαίρετες σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$.

Κατά αναλογία μιά μ.δ.ε. περιλαμβάνει αυθαίρετες συναρτήσεις.

Π.χ. η $u(x,y) = y f(x)$ είναι λύση της $y\frac{\partial u}{\partial y} = u$ όποια κι αν είναι η συνάρτηση f.

Κατα αναλογία με τις σ.δ.ε. η γενική λύση μιάς μ.δ.ε. ν τάξης θα περιλαμβάνει ν αυθαίρετες συναρτήσεις. Αν και αυτό δεν ισχύει πάντοτε μπορούμε να το δεχόμαστε για το είδος των μ.δ.ε. που θα εξετάσουμε.

Γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

Είναι εξισώσεις της μορφής:

$$(1) \qquad f_1(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + f_2(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = f_3(x,y,u)$$

Για την λύση της (1) σχηματίζουμε το βοηθητικό σύστημα:

$$(2) \qquad \frac{dx}{f_1(x,y,u)} = \frac{dy}{f_2(x,y,u)} = \frac{du}{f_3(x,y,u)}$$

που λέγεται χαρακτηριστικό σύστημα της (1).

Αν $\varphi_1(x,y,u) = c_1$, $\varphi_2(x,y,u) = c_2$ δύο ανεξάρτητες λύσεις του (2) τότε αποδεικνύεται ότι η $F(\varphi_1,\varphi_2) = 0$, όπου F αυθαίρετη συνάρτηση, είναι η γενική λύση της (1).

Οι $\varphi_1(x,y,u) = c_1$, $\varphi_2(x,y,u) = c_2$ ορίζουν (στον χώρο τριών διαστάσεων) μιά διπαραμετρική οικογένεια καμπυλών. Οι καμπύλες αυτές ονομάζονται χαρακτηριστικές καμπύλες της (1). Αν θεωρήσουμε μιά συγκεκριμένη συνάρτηση F τότε λέμε ότι η $F(\varphi_1,\varphi_2) = 0$ ορίζει μιά ολοκληρωτική επιφάνεια της (1).

<u>Παράδειγμα:</u> $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u \qquad (3)$

το βοηθητικό σύστημα είναι: $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{du}{u}$

άρα $\ln y = \ln x + c_1 \Rightarrow \ln y = \ln c_1 x \Rightarrow y = c_1 x$

$\ln u = \ln x + \ln c_2 \Rightarrow u = c_2 x$

$$\varphi_1(x,y,u) = c_1 \quad \text{είναι} \quad \frac{y}{x} = c_1$$

$$\varphi_2(x,y,u) = c_2 \quad \quad \frac{u}{x} = c_2$$

άρα η γενική λύση της (3) είναι: $F\left(\frac{y}{x},\frac{u}{x}\right) = 0$

όπου F αυθαίρετη συνάρτηση.

- Μπορούμε να επιλέγουμε ως την μορφή της γενικής λύσης την $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ όπου f αυθαίρετη συνάρτηση. Στο παραπάνω παράδειγμα $\frac{u}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ή $u = x f\left(\frac{y}{x}\right)$

<u>Παράδειγμα:</u> $y^3 \frac{\partial u}{\partial x} - x y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = \alpha x u$ (4)

το χαρακτηριστικό σύστημα της (4) είναι:

$$\frac{dx}{y^3} = \frac{dy}{-xy^2} = \frac{du}{\alpha x u}$$

$$-xy^2 dx = y^3 dy \Rightarrow -x dx = y dy \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}y^2 + \bar{c_1}$$

$$\Rightarrow y^2 + x^2 = c_1$$

$$\alpha x u \, dy = -xy^2 du \Rightarrow \alpha u \, dy = -y^2 du \Rightarrow \alpha y^{-2} dy = -u^{-1} du$$

$$\Rightarrow \alpha y^{-1} = -\ln u + \ln c_2 = \ln \frac{c_2}{u} \Rightarrow \frac{c_2}{u} = e^{\frac{\alpha}{y}} \Rightarrow u = c_2 e^{-\frac{\alpha}{y}}$$

άρα η $c_2 = f(c_1)$ δηλαδή η $u = e^{\frac{\alpha}{y}} f(y^2 + x^2)$ είναι η γενική λύση της (4), όπου f αυθαίρετη συνάρτηση.

<u>Το Γεωμετρικό Πρόβλημα του Cauchy</u>

Ζητείται να βρεθεί η ολοκληρωτική επιφάνεια της (1) (δηλαδή μιά συγκεκριμένη λύση της) η οποία διέρχεται από την καμπύλη C που ορίζεται από τις εξισώσεις $\sigma_1(x,y,u) = 0$, $\sigma_2(x,y,u) = 0$.

Λύνουμε το πρόβλημα του Cauchy ως εξής:

(1) κάνουμε απαλοιφή των x, y, u από τις εξισώσεις που ορίζουν τις χαρακτηριστικές καμπύλες της (1) και τις εξισώσεις που ορίζουν την καμπύλη C, δηλαδή από τις:

$\varphi_1(x,y,u) = c_1$, $\varphi_2(x,y,u) = c_2$, $\sigma_1(x,y,u) = 0$, $\sigma_2(x,y,u) = 0$

και καταλήγουμε σε μία σχέση $\sigma(c_1, c_2) = 0$.

Αν στην τελευταία σχέση αντικαταστήσουμε τα c_1, c_2 με $\varphi_1(x,y,u)$, $\varphi_2(x,y,u)$ παίρνουμε:

$$\sigma[\varphi_1(x,y,u), \varphi_2(x,y,u)] = 0$$

η οποία είναι

η ολοκληρωτική επιφάνεια της (1) που περιέχει την καμπύλη C.

<u>Παράδειγμα:</u> Να βρεθεί η γενική λύση της $x^2\frac{\partial u}{\partial x}+y^2\frac{\partial u}{\partial y}=u^2$ (5)
και να ορισθεί η ολοκληρωτική επιφάνεια που διέρχεται από την ευθεία $x=2y=3u$

το χαρακτηριστικό σύστημα της (5) είναι:

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}=\frac{du}{u^2} \qquad \text{απ' όπου :}$$

$$\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1=\frac{x-y}{xy}$$

$$\frac{1}{u}-\frac{1}{x}=c_2$$

και η γενική λύση της (5) είναι:

$$c_2=f(c_1) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u}=\frac{1}{x}+f\left(\frac{x-y}{xy}\right)$$

Με απαλοιφή των x,y,u από τις $x=2y$, $x=3u$, $\frac{x-y}{xy}=c_1$, $\frac{1}{u}-\frac{1}{x}=c_2$

(απαλ. x): $2y=3u$, $\frac{1}{2y}=c_1$, $\frac{1}{u}-\frac{1}{2y}=c_2$

(απαλ. y): $\frac{1}{3u}=c_1$, $\frac{2}{3u}=c_2$, (απαλ. u): $2c_1=c_2$

οπότε η $\frac{1}{u}-\frac{1}{x}=2\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)=2\left(\frac{x-y}{xy}\right)$

είναι η ζητούμενη ολοκληρωτική επιφάνεια.

<u>Παράδειγμα:</u> Να βρεθεί η γενική λύση της $2yu\frac{\partial u}{\partial x}-xu\frac{\partial u}{\partial y}+xy=0$ (6)
και να ορισθεί η ολοκληρωτική επιφάνεια που διέρχεται από την καμπύλη $x^2+y^2=y$, $u=0$.

το χαρακτηριστικό σύστημα είναι: $\frac{dx}{2yu}=\frac{dy}{-xu}=\frac{du}{-xy}$

απ' όπου: $y^2=-\frac{x^2}{2}+c_1$, $2u^2+x^2=c_2$

Η γενική λύση της (6) είναι: $c_2=f(c_1) \Rightarrow 2u^2+x^2=f\left(y^2+\frac{x^2}{2}\right)$

με απαλοιφή των x,y,u από τις $x^2+y^2=y$, $u=0$, $y^2+\frac{x^2}{2}=c_1$, $2u^2+x^2=c_2$

(απαλ. u) $x^2+y^2=y$, $y^2+\frac{x^2}{2}=c_1$, $x^2=c_2$

(απαλ. x) $c_2+y^2=y$, $y^2+\frac{c_2}{2}=c_1$

(απαλ. y) $\quad c_2+c_1-\frac{c_2}{2}=y \Rightarrow y=\frac{c_2}{2}+c_1 \Rightarrow c_2+\left(\frac{c_2}{2}+c_1\right)^2=\frac{c_2}{2}+c_1$

$-\frac{c_2}{2}+c_1=\left(\frac{c_2}{2}+c_1\right)^2$ και θέτοντας $c_1=y^2+\frac{x^2}{2}$, $c_2=2u^2+x^2$

$$-u^2-\frac{x^2}{2}+y^2+\frac{x^2}{2}=\left(u^2+\frac{x^2}{2}+y^2+\frac{x^2}{2}\right)^2 \Rightarrow y^2-u^2=(u^2+y^2+x^2)^2$$

που είναι η ζητούμενη ολοκληρωτική επιφάνεια.

Μ.δ.ε. 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές (δύο μεταβλητών x,y)

Είναι εξισώσεις της μορφής:

$$\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2h\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2f\frac{\partial u}{\partial x}+2g\frac{\partial u}{\partial y}+cu=0 \qquad (1)$$

όπου α, h, b, f, g, c σταθερές.

Κατά αναλογία με την γενική κωνική εξίσωση:

$$\alpha x^2+2hxy+by^2+2fx+2gy+c=0$$

λέμε ότι η (1) είναι:

- ελλειπτικής μορφής όταν $\alpha b-h^2>0$
- παραβολικής μορφής όταν $\alpha b-h^2=0$
- υπερβολικής μορφής όταν $\alpha b-h^2<0$

Παράδειγμα: $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \alpha=1, h=0, b=1$ (ελλειπτική)

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-k^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \alpha=1, h=0, b=-k^2$ (υπερβολική)

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-k\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad \alpha=1, h=0, b=0$ (παραβολική)

Εξίσωση του Euler

Μιά ειδική περίπτωση της (1) είναι η εξίσωση Euler:

$$(2) \qquad \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2h \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Η γενική λύση της (2) μπορεί να βρεθεί ως εξής:

Ορίζουμε δύο νέες ανεξάρτητες μεταβλητές ξ και η

$$\xi = px + qy \quad , \quad \eta = rx + sy$$

όπου p, q, r, s αυθαίρετες σταθερές. Τότε

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = p\frac{\partial u}{\partial \xi} + r\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = q\frac{\partial u}{\partial \xi} + s\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$= p\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot p + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} r\right] + r\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} p + r\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right]$$

$$= p^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2pr\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + r^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = q^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2sq\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + s^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \left(p\frac{\partial}{\partial \xi} + r\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(q\frac{\partial u}{\partial \xi} + s\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) =$$

$$= pq\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (rq + sp)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + rs\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας στην (2) τις (3), (4), (5) έχουμε:

$$(\alpha p^2 + b q^2 + 2hpq)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\left\{\alpha pr + bsq + h(rq+sp)\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$$
$$+ (\alpha r^2 + b s^2 + 2hs)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0 \qquad (6)$$

επιλέγοντας $p = r = 1$ και q, s να είναι οι ρίζες x_1, x_2 της $\alpha + 2hx + bx^2 = 0$ έχουμε:

(εφ' όσον $x_1 + x_2 = -\frac{2h}{b}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{\alpha}{b}$)

$$\left\{\alpha + bsq + h(s+q)\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{2}{b}\left\{\alpha b - h^2\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

- αν $\alpha b - h^2 \neq 0$ (δηλαδή η (2) δεν είναι παραβολική)

έχουμε $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ άρα ολοκληρώνοντας

$$u = f(\xi) + g(\eta)$$

όπου f, g αυθαίρετες συναρτήσεις. Όμως $\xi = x + x_1 y$, $\eta = x + x_2 y$ άρα

$$u = f(x + x_1 y) + g(x + x_2 y)$$

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι αν $\alpha b - h^2 < 0$ (υπερβολική) οι x_1, x_2 είναι πραγματικές ενώ αν $\alpha b - h^2 > 0$ (ελλειπτική) οι x_1, x_2 είναι μιγαδικές.

• αν $\alpha b-h^2=0$ (η (2) είναι παραβολικής μορφής)

τότε θέτοντας στην (6) $p=1$ έχουμε:

$$(\alpha+bq^2+2hq)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\{\alpha r+bsq+h(rq+s)\}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}$$

$$+(\alpha r^2+bs^2+2hrs)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0 \qquad (7)$$

επιλέγοντας το q ως ρίζα της $\alpha+bq^2+2hq=0$
και εφ' όσον $\alpha b-h^2=0$ το $q=-\frac{h}{b}$ είναι διπλή ρίζα
άρα $\alpha+bq^2+2hq=0$

$$\alpha r+bs(-\tfrac{h}{b})+hr(-\tfrac{h}{b})+hs=\alpha r-sh-\frac{rh^2}{b}+hs=\frac{r}{b}(\alpha b-h^2)=0$$

άρα $(\alpha r^2+bs^2+2hrs)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0$ και υποθέτοντας $\alpha r^2+bs^2+2hrs\neq 0$

έχουμε $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0$

με ολοκλήρωση, η γενική λύση της (2) για $\alpha b-h^2=0$
είναι: $u=f(\xi)+\eta\, g(\xi)$ όπου f,g αυθαίρετες συναρτήσεις.

όμως $\xi=x+(-\frac{h}{b})y$, $\eta=rx+sy$

οπότε η γενική λύση της (2) για $\alpha b-h^2=0$ γίνεται

$$u=f(x-\tfrac{h}{b}y)+(rx+sy)\,g(x-\tfrac{h}{b}y)$$

<u>Παράδειγμα</u>: Εξίσωση του Laplace με δύο μεταβλητές

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (*)$$

η (*) είναι ειδική περίπτωση της εξίσωσης Euler με $\alpha=b=1$, $h=0$. Άρα η $\alpha+2hx+bx^2=0$ είναι $1+x^2=0$
$x_1=i$, $x_2=-i$ και η γενική λύση της (*) είναι:

$$u=f(x+iy)+g(x-iy) \qquad f,g \text{ αυθαίρετες.}$$

<u>Παράδειγμα:</u> Η $\quad 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

είναι υπερβολικής μορφής ($\alpha=2,\ h=\frac{3}{2},\ b=1$) $\alpha b-h^2<0$.

Έχουμε ότι $\quad 2+3x+x^2=0 \quad ,\ x_1=-1,\ x_2=-2$

Άρα η γενική λύση είναι: $\quad u=f(x-y)+g(x-2y)$

<u>Παράδειγμα:</u> Η $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

είναι παραβολικής μορφής ($\alpha=1,\ h=2,\ b=4$) $\quad \alpha b-h^2=0$

$1+4x+4x^2=0 \qquad x=-\frac{1}{2}$ (διπλή ρίζα)

Άρα η γενική λύση είναι: $\quad u=f(x-\frac{1}{2}y)+(rx+sy)g(x-\frac{1}{2}y)$

<u>Ασκήσεις:</u> 1) Να βρεθεί η γεν. λύση της $\quad x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}-xy\dfrac{\partial u}{\partial y}+y^2=0$

2) Να βρεθεί η γεν. λύση της $\quad y\dfrac{\partial u}{\partial x}-x\dfrac{\partial u}{\partial y}=y^2-x^2$

3) Να βρεθεί η γεν. λύση της $\quad ux\dfrac{\partial u}{\partial y}-uy\dfrac{\partial u}{\partial x}=2ux$ και να οριθεί η ολοκληρωτική επιφάνεια που διέρχεται από τον y.

4) Να βρεθεί η γεν. λύση της $\quad (y+u)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(x+u)\dfrac{\partial u}{\partial y}=y-x$ και να οριθεί η ολοκληρωτική επιφάνεια που διέρχεται από τον κύκλο $\quad x^2+u^2=1,\ y=0$

5) Καθορίστε το είδος των παρακάτω εξισώσεων (ελλειπτική, υπερβολική, παραβολική) και βρείτε τις γενικές λύσεις.

(α) $\quad 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

(b) $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

(c) $\quad 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

6) Δείξτε ότι η γενική λύση της

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial z}{\partial r}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad , \qquad z = z(r,t)$$

είναι: $z = \frac{1}{r}\Big(u(r+ct) + V(r-ct)\Big)$ όπου u, V αυθαίρετες.

7) Βρείτε την $V(x,y)$ της μορφής $f(x)\cdot g(y)$ που ικανοποιεί την μ.δ.ε.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad \text{και} \quad V(x,0) = \text{συν}\,2x$$

8) Βρείτε την $V(x,t)$ της μορφής: $f(x)g(t)$ που ικανοποιεί την

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{2}{\alpha}\frac{\partial V}{\partial t} + V$$

και τις : (i) $V(\ell,t) = 0 \quad \forall\, t$

(ii) $\frac{\partial V}{\partial x} = -c\,e^{-\alpha t} \quad \forall\, t$ όταν $x = 0$.

ΘΕΩΡΙΑ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ

Σύμφωνα με τον νόμο του Νεύτωνα δύο σώματα υφίστανται αμοιβαία έλξη, ανάλογη προς τις μάζες τους και αντιστρόφως ανάλογη προς το τετράγωνο της απόστασής τους:

$$F_g = \kappa \cdot \frac{m\mu}{r^2} .$$

Ανάλογη μορφή έχει ο νόμος του Coulomb με την διαφορά ότι αντί για μάζες έχουμε φορτία:

$$F_c = \kappa \frac{qQ}{r^2} .$$

Αν το σημείο P έλκεται από την πηγή Q τότε η δύναμη F έχει διεύθυνση PQ και φορά από το P στο Q. Αν η κατεύθυνση της δύναμης σχηματίζει γωνίες α, β, γ με τους άξονες συντεταγμένων και $P(x,y,z)$, $Q(\xi,\eta,\zeta)$ τότε η απόσταση r του P από το Q είναι:

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2} .$$

Οι συνιστώσες της δύναμης F είναι: (θεωρούμε $m \cdot \kappa = 1$)

$$F_x = F\,\text{συν}\alpha = \frac{\mu}{r^2}\,\frac{(\xi-x)}{r} = \frac{\mu(\xi-x)}{r^3} , \quad F_y = \frac{\mu(\eta-y)}{r^3} , \quad F_z = \frac{\mu(\zeta-z)}{r^3}$$

Οι συνιστώσες αυτές είναι μερικές παράγωγοι μιάς συνάρτησης $U(x,y,z)$ την οποία ο Gauss ονόμασε δυναμικό στο σημείο $P(x,y,z)$ προκαλούμενο από την ευρισκόμενη στο σημείο Q μάζα μ.

Αν
$$U = \frac{\mu}{r} = \mu\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

τότε
$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{2}\mu\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-\frac{3}{2}} \cdot 2(x-\xi) = \mu\frac{\xi-x}{r^3} = F_x$$

Αντίστοιχα, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = F_y$ και $\dfrac{\partial U}{\partial z} = F_z$.

Το δυναμικό U ορίζεται για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ εκτός από το σημείο στο οποίο βρίσκεται η πηγή Q, το (ξ, η, ζ).

Ισοδυναμικές Επιφάνειες

Αν θεωρήσουμε όλα τα σημεία (x, y, z) του τρισδιάστατου χώρου για τα οποία το δυναμικό $U(x, y, z)$ έχει μιά σταθερή τιμή c, δηλαδή το σύνολο $\{(x, y, z) : U(x, y, z) = c\}$, μπορούμε να ορίσουμε μιά ισοδυναμική επιφάνεια. Αν οι τιμές της παραμέτρου c μεταβάλλονται, λέμε ότι η $U(x, y, z) = c$ παριστάνει μια μονοπαραμετρική οικογένεια επιφανειών.

Στην περίπτωση του δυναμικού $U = \dfrac{\mu}{r}$ η οικογένεια των ισοδυναμικών επιφανειών, είναι: $\dfrac{\mu}{r} = c$ και είναι φανερό ότι οι επιφάνειες αυτές είναι ομόκεντρες σφαίρες γύρω από την πηγή Q.

Αν παραγωγίσουμε την σχέση

$$\frac{1}{r} = \left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

δύο φορές μερικά ως προς x, έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\right]^{-\frac{3}{2}}(x-\xi)$$

και $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = 3\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\right]^{-\frac{5}{2}}(x-\xi)^2 - \left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\right]^{-}$$

$$= \frac{3(x-\xi)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \qquad (2)$$

Αν τώρα παραγωγίσουμε την (1) δύο φορές μερικά ως προς y, έχουμε

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3(y-\eta)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \qquad (3)$$

και αν παραγωγίσουμε την (1) δύο φορές μερικά ως προς z, έχουμε:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3(z-J)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \qquad (4)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2),(3),(4) έχουμε:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{3r^2}{r^5} - \frac{3}{r^3} = 0 \qquad (5)$$

Συνεπώς η συνάρτηση $U = \frac{1}{r}$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση Laplace:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

Ο τελεστής $\nabla^2(\cdot) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\cdot) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\cdot) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\cdot)$

λέγεται τελεστής Laplace.

Σχηματισμός ισοδυναμικών επιφανειών

Αν η συνάρτηση $U(x,y,z)$ είναι λύση της εξίσωσης Laplace τότε η μονοπαραμετρική οικογένεια επιφανειών $U(x,y,z) = c$ είναι μιά οικογένεια ισοδυναμικών επιφανειών. Όμως δεν είναι οικογένεια ισοδυναμικών επιφανειών κάθε οικογένεια της μορφής:

$$f(x,y,z) = c \quad .$$

Η $f(x,y,z)$ μπορεί να σχηματίσει οικογένεια ισοδυναμικών επιφανειών αν ισχύει μιά συνθήκη την οποία θα δείξουμε.

Οι $f(x,y,z) = c$ ~~είναι~~ μπορούν να σχηματίσουν ισοδυναμικές επιφάνειες αν η $U(x,y,z)$ είναι σταθερά όταν η $f(x,y,z)$ είναι σταθερά. Πρέπει συνεπώς να υπάρχει μιά συναρτησιακή σχέση της μορφής:

$$U = F(\, f(x,y,z)\,) \qquad (6)$$

Παραγωγίζοντας την (6) μερικά ως προς x έχουμε:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dF}{df}\frac{\partial f}{\partial x}$$

και
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{d^2F}{df^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \frac{dF}{df}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

απ' όπου προκύπτει:
$$\nabla^2 U = F''(f)\,(\mathrm{grad} f)^2 + F'(f)\,\nabla^2 f$$

όμως $\nabla^2 U = 0$, οπότε η συνθήκη γίνεται:

$$\frac{\nabla^2 f}{(\mathrm{grad} f)^2} = -\frac{F''(f)}{F'(f)} \qquad (7)$$

Συνεπώς η συνθήκη για να ~~είναι~~ μπορούν να σχηματίσουν οι επιφάνειες $f(x,y,z)=C$ ισοδυναμικές επιφάνειες είναι η ακόλουθη:

η ποσότητα $\dfrac{\nabla^2 f}{|\mathrm{grad} f|^2}$ να είναι συνάρτηση της f μόνον.

Αν συμβολίσουμε με $\chi(f)$ αυτή την συνάρτηση, τότε η (7) γράφεται:

$$\frac{d^2F}{df^2} + \chi(f)\frac{dF}{df} = 0$$

απ' όπου
$$\frac{dF}{df} = A\, e^{-\int \chi(f)\,df}$$

δηλαδή
$$U = A\int e^{-\int \chi(f)\,df}\,df + B$$ όπου A, B σταθερές.

Λύσεις της εξίσωσης Laplace με χωρισμό των μεταβλητών

Αν $U(x,y,z)$ λύση της εξίσωσης Laplace της μορφής

$U(x,y,z) = X(x)\, Y(y) \cdot Z(z)$. Τότε έχουμε:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = k^2 \ , \ \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \ell^2 \ , \ \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = m^2 \quad \text{με } m^2+\ell^2+k^2=0$$

και έτσι οι $U(x,y,z) = e^{kx}e^{\ell y}e^{mz}$ είναι λύσεις της εξίσωσης Laplace.

Εξίσωση Laplace στο επίπεδο

Δυναμικά δύο διαστάσεων εμφανίζονται όταν κάποια φυσικά φαινόμενα δεν εξαρτώνται από την τρίτη διάσταση π.χ. z. Παραδείγματος χάριν οι δυνάμεις που ασκούνται στα σημεία (x,y,z) από μία μεγάλου μήκους ράβδο που βρίσκεται πάνω στον άξονα των z εξαρτώνται ελάχιστα από το z, οπότε το δυναμικό U δεν εξαρτάται από το z και έχουμε ένα διδιάστατο δυναμικό $U(x,y)$ που εμφανίζεται ως λύση της

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \qquad (L_1)$$

Η εξίσωση (L_1) λέμε ότι είναι η διδιάστατη εξίσωση Laplace.

Αν γράψουμε (*) την (L_1) σε πολικές συντεταγμένες έχουμε:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0 \qquad (L_p)$$

και αν η U είναι συνάρτηση του r μόνον, τότε:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right) = 0$$

και $\quad U = A\ln r + B$

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι οι επιφάνειες : $x^2+y^2+z^2 = cx^{2/3}$
μπορούν να σχηματίσουν οικογένεια ισοδυναμικών επιφανειών και βρείτε την γενική μορφή της συνάρτησης δυναμικού.

2. Δείξτε την ισοδυναμία των (L_1) , (L_p).