ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Ας θεωρήσουμε το γραμμικό σύστημα:

$$x_1'' = \alpha x_1 + b x_2' \qquad (1)$$
$$x_2'' = c x_1' + d x_2$$

όπου οι άγνωστες συναρτήσεις $x_1(\cdot), x_2(\cdot) : I \to \mathbb{R}$ μπορούν να θεωρηθούν ως συνιστώσες της άγνωστης διανυσματικής συνάρτησης $x(\cdot) : I \to \mathbb{R}^2$ $\quad x(t) = (x_1(t), x_2(t))$

Αν θέσουμε $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_1'$, $y_4 = x_2'$ τότε στη θέση του (1) παίρνουμε το σύστημα:

$$y_1' = y_3$$
$$y_2' = y_4 \qquad (2)$$
$$y_3' = \alpha y_1 + b y_4$$
$$y_4' = c y_3 + d y_2$$

όπου $y(\cdot) : I \to \mathbb{R}^4$, $y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t))$

Το σύστημα (2) γράφεται στη διανυσματική μορφή:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & b \\ 0 & d & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

ή ισοδύναμα $\quad y' = Ay$

όπου $y : I \to \mathbb{R}^4$

και A ο 4×4 πίνακας $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & b \\ 0 & d & c & 0 \end{pmatrix}$.

Γενικά, το σύστημα πρώτης τάξης:

$$(3) \qquad x_i' = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(t)\, x_j + b_i(t) \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

όπου $\alpha_{ij}(\cdot)$, $i,j = 1,2,..,n$ και $b_i(\cdot)$, $i = 1,2,..,n$ είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο I γράφεται:

$$x'(t) = A(t)\,x(t) + b(t) \qquad (4)$$

όπου $x(\cdot) = (x_1(\cdot), x_2(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))$ άγνωστη συνάρτηση $x : I \to \mathbb{R}^n$, $A(t)$ ο $n \times n$ πίνακας $(\alpha_{ij}(t))$ (με στοιχεία συναρτήσεις) και $b(\cdot) = (b_1(\cdot), b_2(\cdot), \ldots, b_n(\cdot))$, $b : I \to \mathbb{R}^n$

<u>Παράδειγμα:</u> Η γραμμ. διαφ. εξ. n-τάξης

$$y^{(n)} + \alpha_1(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_n(t)\, y = \beta(t)$$

μπορεί να γραφεί στη μορφή $x' = A(t)x + b(t)$ αν θέσουμε $x_1 = y$, $x_2 = y'$, $x_3 = y''$, ..., $x_n = y^{(n-1)}$.

Τότε έχουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= x_4 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= -\alpha_1(t)x_n - \alpha_2(t)x_{n-1} - \cdots - \alpha_n(t)x_1 + \beta(t) \end{aligned}$$

που γράφεται:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 1 \\ -\alpha_n(t) & \cdots & & & & -\alpha_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

δηλαδή :

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

με $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & & & 1 \\ -\alpha_n(t) & -\alpha_{n-1}(t) & \cdot & \cdot & & & -\alpha_1(t) \end{pmatrix}$, $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix}$

<u>Παράδειγμα</u>: $x' = \alpha(t)x$, $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$

Η λύση είναι όπως γνωρίζουμε : $x(t) = x(t_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t} \alpha(s)ds\right]$

<u>Θεώρημα</u>: Αν $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ (4) όπου $A(\cdot), b(\cdot)$ συνεχείς στο I τότε για κάθε τιμή $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ (ή ισοδύναμα για κάθε αρχική συνθήκη $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$) υπάρχει μοναδική λύση $x(\cdot)$ της (4) που ικανοποιεί την $x(t_0) = x_0$.

<u>Θεμελιώδεις Λύσεις</u>

Ας θεωρήσουμε το γραμμικό ομογενές σύστημα πρώτης τάξης :

$$x'(t) = A(t)x(t) \qquad (5)$$

όπου $x : I \to \mathbb{R}^n$, συνεχής.

Το σύστημα (5) λέγεται ομογενές γιατί θεωρείται ειδική περίπτωση του (4) με $b(t) \equiv 0$. Επίσης λέγεται γραμμικό γιατί κάθε γραμμικός συνδυασμός λύσεων του (5) είναι λύση του (5).

Πράγματι, αν $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ λύσεις του (5) τότε η $\varphi = \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i$ είναι λύση του (5) γιατί,

$$\varphi' = c_1\varphi_1' + c_2\varphi_2' + \cdots + c_m\varphi_m' = c_1A(t)\varphi_1 + c_2A(t)\varphi_2 + \cdots + c_mA(t)\varphi_m$$

$$= A(t)\,(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_m\varphi_m) = A(t)\,\varphi$$

<u>Πρόταση</u>: Η τετριμμένη λύση $\varphi(t) \equiv 0$ είναι η μοναδική λύση που ικανοποιεί την συνθήκη $\varphi(t_0) = 0$, όπου $t_0 \in I$.

<u>Απόδειξη</u>: Αν $x(\cdot)$ λύση της (5) τέτοια ώστε $x(t_0) = 0$ τότε από την μοναδικότητα της λύσης (θεώρημα) έχουμε $x(t) = \varphi(t)$ για $t \in I$.

Η γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία συναρτήσεων $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ ορίζονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που ορίστηκαν για πραγματικές συναρτήσεις $\varphi : I \to \mathbb{R}$. Το μηδεν είναι το $\mathbf{0} = (0, 0, .., 0)$.

Μιά οικογένεια λύσεων του (5), $\varphi_1, \varphi_2, .., \varphi_n$ λέμε ότι αποτελεί θεμελιώδες σύστημα λύσεων αν οι $\varphi_1, \varphi_2, .., \varphi_n$ είναι γραμμ. ανεξάρτητες.

Δηλαδή αν ισχύει η συνεπαγωγή $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_n\varphi_n = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Η σημασία του θεμελιώδους συστήματος λύσεων βρίσκεται στο ότι κάθε λύση του (5) μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός του θεμελιώδους συστήματος λύσεων. Πρώτα θα δείξουμε ότι:

<u>Θεώρημα</u>: Υπάρχει ένα Θ.Σ.Λ. για το σύστημα (5).

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $e_1, e_2, .., e_n$ τα γραμμ. ανεξάρτητα διανύσματα

$$e_j = (0, 0, .. 0, \underset{j\text{-θέση}}{1}, 0, .., 0) \quad , \quad j = 1, 2, .., n$$

Για κάποιο $t_0 \in I$ θεωρούμε τις λύσεις $\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), .., \varphi_n(\cdot)$ του (5) που ικανοποιούν τις συνθήκες $\varphi_j(t_0) = e_j$, $j = 1, 2, .., n$. Οι λύσεις αυτές είναι διακεκριμένες γιατί ικανοποιούν διακεκριμένες αρχικές συνθήκες. Επίσης είναι γραμμ. ανεξάρτητες γιατί αν

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(t) \equiv \mathbf{0} \quad \text{τότε} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(t_0) = \mathbf{0} \quad \text{δηλ.} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j e_j = \mathbf{0}$$

Όμως τα e_j; $j = 1, 2, ., n$ είναι γραμμ. ανεξάρτητα άρα $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Συνεπώς οι $\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), .., \varphi_n(\cdot)$ είναι γραμμ. ανεξάρτητες και αποτελούν ένα (όχι το μοναδικό) θεμελιώδες σύστημα λύσεων.

Πόρισμα: Κάθε λύση του (5) είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων ενός θεμελιώδους συστήματος λύσεων.

Απόδειξη: Έστω $x(t)$ μιά λύση του (5) και $t_0 \in I$. Θεωρούμε το στοιχείο $x(t_0) = x_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$. Αν $\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \ldots, \varphi_n(\cdot)$ το Θ.Σ.Λ. που κατασκευάσαμε στο προηγούμενο θεώρημα, τότε: η $\varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} x_{j0}\varphi_j(t)$ είναι λύση του (5) ως γραμμικός συνδυασμός λύσεων του (5) και $\varphi(t_0) = \sum_{j=1}^{n} x_{j0}\varphi_j(t_0) = \sum_{j=1}^{n} x_{j0} e_j$ $= (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) = x_0$. Από την μοναδικότητα λύσεων του (5) και εφ' όσον $\varphi(t_0) = x_0 = x(t_0)$ έχουμε $x(t) \equiv \varphi(t)$.
Άρα $x(t) = \sum_{j=1}^{n} x_{j0}\varphi_j(t)$.

Παράδειγμα: Ας θεωρήσουμε το σύστημα (διάστασης 2) $x' = A(t)x$ που αντιστοιχεί στην εξίσωση δεύτερης τάξης $x'' + x = 0$

Το σύστημα αυτό είναι:
$$x' = y$$
$$y' = -x$$
ή ισοδύναμα

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Αν θεωρήσουμε τις δύο λύσεις $\varphi_1(t) = (\text{συν}t, -\text{ημ}t)$ και $\varphi_2(t) = (\text{ημ}t, \text{συν}t)$ θα δούμε ότι αυτές είναι γραμμ. ανεξάρτητες.

Πράγματι,
$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) = 0 \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow (c_1\text{συν}t + c_2\text{ημ}t,\ -c_1\text{ημ}t + c_2\text{συν}t) = (0,0)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} c_1\text{συν}t + c_2\text{ημ}t = 0 \\ -c_1\text{ημ}t + c_2\text{συν}t = 0 \end{cases} \overset{t=0}{\Rightarrow} \begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{matrix}$$

Επίσης $\varphi_1(0) = (1,0) = e_1$, $\varphi_2(0) = (0,1) = e_2$
Άρα οι φ_1, φ_2 αποτελούν ένα Θ.Σ.Λ. και κάθε λύση $(x(t), y(t))$ με $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ γράφεται:

$$(x(t), y(t)) = x_0\varphi_1(t) + y_0\varphi_2(t)$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα και το πόρισμα ο χώρος $\mathcal{X}$ των λύσεων του $x'(t)=A(t)x(t)$ είναι ένας διανυσματικός (γραμμικός) χώρος, εφ' όσον κάθε γραμμ. συνδυασμός λύσεων αποτελεί λύση. Επίσης, μιά βάση του χώρου είναι το Θ.Σ.Λ. με n-λύσεις οπότε η διάσταση του χώρου των λύσεων είναι n.

Αν $\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \ldots, \varphi_n(\cdot)$ ένα Θ.Σ.Λ. για το (5) τότε ο πίνακας

$$\Phi(t) = [\varphi_1(t) \ \varphi_2(t) \cdots \varphi_n(t)]$$

$$= \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & & \cdot \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & & \varphi_{nn}(t) \end{bmatrix} = (\varphi_{ij}(t)) \qquad \begin{matrix} i=1,2,..,n \\ j=1,2,..,n \end{matrix}$$

(δηλαδή ο πίνακας που έχει σαν στήλες ενα Θ.Σ.Λ.) λέγεται θεμελιώδης πίνακας για το (5).

<u>Πρόταση</u>: Ο $\Phi(t)$ που έχει στήλες τις λύσεις $\varphi_j(t)$ που ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες $\varphi_j(t_0)=e_j$, $j=1,2,..,n$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης πινάκων:

$$\Phi' = A(t)\cdot\Phi$$

που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\Phi(t_0)=I$

Επίσης μιά λύση της (5) που ικανοποιεί την $x(t_0)=x_0$ μπορεί να γραφεί ως $x(t)=\Phi(t)x_0$.

<u>Απόδειξη</u>: Κάθε στήλη του $\Phi(t)$, $\varphi_j(t)$ ικανοποιεί την $\varphi_j'(t)=A(t)\varphi_j(t)$

Άρα $\Phi'(t) = [\varphi_1'(t) \ \varphi_2'(t) \ldots \varphi_n'(t)] = [A(t)\varphi(t) \ A(t)\varphi_2(t) \cdots A(t)\varphi_n]$

$= A(t)\Phi(t)$ και προφανώς $\Phi(t_0)=[e_1 e_2 \cdots e_n]=I$

Από το προηγούμενο πόρισμα $x(t)=\sum_{j=1}^{n} x_{j0}\varphi_j(t) =$

$$= [\varphi_1(t) \ \varphi_2(t) \cdots \varphi_n(t)]\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0}\end{bmatrix} = \Phi(t)x_0$$

Ορισμός: Αν $\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \dots, \varphi_n(\cdot)$ λύσεις του συστήματος $x' = A(t)x$ τότε η πραγματική συνάρτηση:

$$W(t) = \det \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

λέγεται Wronskian ή ορίζουσα Wronski των $\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \dots, \varphi_n(\cdot)$.

Παράδειγμα: $\left.\begin{matrix} x' = y \\ y' = -x \end{matrix}\right\}$ $\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \text{συν} t & \eta\mu t \\ -\eta\mu t & \text{συν} t \end{pmatrix} \qquad W(t) = \text{συν}^2(t) + \eta\mu^2(t) = 1$$

Ορισμός : Το άθροισμα $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}$ των στοιχείων της διαγωνίου ενός τετραγωνικού πίνακα A λέγεται ίχνος (trace) του A και συμβολίζεται $tr(A)$.

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει έναν τύπο υπολογισμού της Wronskian (τύπος του Liouville) χωρίς υπολογισμό της ορίζουσας.

Θεώρημα : Αν $\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \dots, \varphi_n(\cdot)$ λύσεις του $x' = A(t)x$ και $t_0 \in I$ τότε η Wronskian των $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ δίνεται από τον τύπο:

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds$$

Εφ' όσον το $\exp \int_{t_0}^{t} trA(s)ds$ είναι πάντα μη μηδενικό η Wronskian είναι ή i) παντού μηδέν στο I (αν υπάρχει $t_0 \in I$ με $W(t_0) = 0$)

ή ii) πουθενά μηδέν στο I

<u>Θεώρημα</u>: Οι λύσεις $\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \ldots, \varphi_n(\cdot)$ αποτελούν ένα Θ.Σ.Λ αν και μόνον αν $W(t) \neq 0$ για $t \in I$.

<u>Απόδειξη</u>: Οι $\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \ldots, \varphi_n(\cdot)$ είναι γραμμ. ανεξάρτητες αν και μόνον αν $c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ για κάθε $t \in I$. Δηλαδή όταν $\Phi(t)\cdot c = 0 \Rightarrow c = 0$, δηλαδή όταν $\det\Phi(t) \neq 0$ για κάθε $t \in I$ που ισοδυναμεί με $W(t) \neq 0$ για $t \in I$.

<u>Πόρισμα</u>: Ενας θεμελιώδης πίνακας $\Phi(t)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης πινάκων $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$. Επί πλέον η λύση $x(t)$ της $x' = A(t)x$ που ικανοποιεί την $x(t_0) = x_0$ γράφεται $x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0$. Ο πίνακας $\Omega(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ είναι ένας θεμελιώδης πίνακας που ικανοποιεί την $\Omega(t_0) = I$.

<u>Απόδειξη</u>: Εχουμε ήδη αποδείξει ότι ο θεμελιώδης $\Phi(t)$ είναι λύση της $\Phi' = A(t)\cdot\Phi$. Μιά λύση $x(t)$ της $x' = A(t)x$ γράφεται $x(t) = \Phi(t)\cdot c$ (ως γραμμ. συνδυασμός στηλών του $\Phi(t)$). Εφ' όσον η $x(\cdot)$ ικανοποιεί την $x(t_0) = x_0$ έχουμε $x_0 = \Phi(t_0)\cdot c$ και επειδή $\det\Phi(t_0) \neq 0$, ο $\Phi(t_0)$ αντιστρέφεται, οπότε $c = \Phi^{-1}(t_0)x_0$ άρα $x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0$.

Επίσης, $\det\Phi^{-1}(t_0) \neq 0$, $\det\Phi(t) \neq 0$ άρα $\det\Omega(t) \neq 0$, δηλαδή οι στήλες του $\Omega(t)$ είναι γραμμ. ανεξάρτητες.

Αν Οι στήλες του $\Phi^{-1}(t_0)$ είναι $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ τότε:

$$\Omega(t) = \Phi(t)\,[\phi_1\ \phi_2 \cdots \phi_n] = [\Phi(t)\phi_1\ \ \Phi(t)\phi_2\ \cdots\ \Phi(t)\phi_n]$$

Οι $\Phi(t)\phi_1, \ldots, \Phi(t)\phi_n$ είναι γραμμ. συνδυασμοί στηλών του $\Phi(t)$ δηλαδή λύσεων του $x' = A(t)x$ άρα είναι και αυτές λύσεις του $x' = A(t)x$. Συνεπώς οι στήλες του $\Omega(t)$ είναι λύσεις, γραμμ. ανεξάρτητες και έτσι ο $\Omega(t)$ είναι ένας θεμελιώδης πίνακας που προφανώς ικανοποιεί την $\Omega(t_0) = I$.

<u>Παράδειγμα:</u>

$$\left.\begin{aligned} x' &= 2x+y \\ y' &= 3x+4y \end{aligned}\right\} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{tr}A = 2+4=6 \quad , \quad t_0=0$$

$$W(t)=W(0)\exp\int_0^t 6\,ds = W(0)\,e^{6t}$$

Ένα Θ.Σ.Λ. δίνεται από τις $\varphi_1(t)=(e^t,-e^t)$ και $\varphi_2(t)=(e^{5t},3e^{5t})$ συνεπώς

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix}$$

και $W(0)=\det\Phi(0)=4$. Άρα $W(t)=4e^{6t}$.

Επίσης $\Phi(0)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\Phi^{-1}(0)=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

οπότε

$$\Omega(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(0)=\begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{5t} & -\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{5t} \\ -\frac{3}{4}e^t+\frac{3}{4}e^{5t} & \frac{1}{4}e^t+\frac{3}{4}e^{5t} \end{pmatrix}$$

είναι ένας θεμελιώδης πίνακας που ικανοποιεί την $\Omega(0)=I$. Άρα κάθε λύση $\varphi(t)$ γράφεται $\varphi(t)=\Omega(t)\varphi(0)$.

Μη Ομογενές Γραμμικό Σύστημα

Ας θεωρήσουμε το μη ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \quad , \; t \in I \qquad (6)$$

όπου: $x : I \to \mathbb{R}^n$

$A(t) = (\alpha_{ij}(t))$ $n \times n$ πίνακας και $\alpha_{ij}(\cdot)$ συνεχείς

$b : I \to \mathbb{R}^n$ συνεχής.

Το (6) όπως έχουμε αναφέρει έχει λύσεις και κάθε μιά από αυτές που ικανοποιεί μιά αρχική συνθήκη $x(t_0) = x_0$ είναι μοναδική.

Στο ομογενές σύστημα $x' = A(t)x$ η λύση που ικανοποιεί την $x(t_0) = x_0$ είναι $x(t) = \Phi(t)x_0$ όπου $\Phi(t)$ ο θεμελιώδης πίνακας με $\Phi(t_0) = I$. Για να προσδιορίσουμε λύσεις της μη ομογενούς (6) εφαρμόζουμε την μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων που έχουμε συναντήσει στην επίλυση μη ομογενών γραμμ. διαφ. εξισώσεων. Εφ' όσον η λύση της ομογενούς είναι $x(t) = \Phi(t) \cdot c$ (όπου $c \in \mathbb{R}^n$ αυθαίρετη παράμετρος που προσδιορίζεται κάθε φορά με βάση την αρχική συνθήκη), μεταβάλλοντας την παράμετρο c αναζητούμε λύσεις της (6) της μορφής: $x(t) = \Phi(t) \cdot c(t)$ όπου $c(t) = (c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t))$.

Έτσι έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

<u>Θεώρημα:</u> Η λύση $x(\cdot)$ της (6) με $x(t_0) = x_0$ δίνεται από τον τύπο:

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi^{-1}(s)b(s)\,ds \quad , \quad t \in I$$

όπου $\Phi(t)$ ο θεμελιώδης πίνακας του $x' = A(t)x$ με $\Phi(t_0) = I$.

<u>Απόδειξη</u>: Αν $x(t)=\Phi(t)c(t)$ τότε $x(t_0)=\Phi(t_0)c(t_0) \Rightarrow$ $x_0 = I\cdot c(t_0) = c(t_0)$. Θέτοντας $x(t)=\Phi(t)c(t)$ στο (6) έχουμε:

$$x'(t) = \Phi'(t)c(t) + \Phi(t)c'(t) = A(t)\Phi(t)c(t) + b(t)$$

όμως $\Phi'(t)=A(t)\Phi(t)$ άρα $\Phi(t)c'(t)=b(t)$. Επίσης $\det\Phi(t)\neq 0$ οπότε ο $\Phi(t)$ αντιστρέφεται για $t\in I$ οπότε $c'(t)=\Phi^{-1}(t)b(t)$.

Άρα $$c(t)=c(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)b(s)ds = x_0 + \int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)b(s)ds$$

και $$x(t)=\Phi(t)x_0 + \int_{t_0}^{t}\Phi(t)\Phi^{-1}(s)b(s)ds$$

- Πρέπει να τονίσουμε ότι ο παραπάνω τύπος έχει περισσότερο θεωρητική αξία μιά και περιλαμβάνει εύρεση ενός θεμελιώδους πίνακα, εύρεση αντιστρόφου και τέλος ολοκλήρωση, διαδικασία πολύ δύσκολη ακόμα και για $n=2$. Είναι όμως πολύ χρήσιμος στη μελέτη της συμπεριφοράς των λύσεων.

Μια απλούστερη μορφή του παραπάνω τύπου έχουμε όταν $A(t)\equiv A$ και $t_0=0$.

<u>Λήμμα</u>: Αν $\Phi(t)$ θεμελιώδης πίνακας του $x'=Ax$, A σταθερός, και $\Phi(0)=I$, τότε $\Phi(t-\alpha)=\Phi(t)\Phi^{-1}(\alpha)$ για κάθε α.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\alpha\in\mathbb{R}$. Αν $\Omega_1(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(\alpha)$ τότε

$$\Omega_1'(t)=\Phi'(t)\Phi^{-1}(\alpha) = A\cdot\Phi(t)\Phi^{-1}(\alpha) = A\cdot\Omega_1(t)$$

Άρα $\Omega_1(\cdot)$ λύση του $\Phi'=A\Phi$ με $\Omega_1(\alpha)=I$.

Η $\Omega_2(t)=\Phi(t-\alpha)$ ικανοποιεί την $\Omega_2(\alpha)=\Phi(0)=I$ και $\Omega_2'(t)=\Phi'(t-\alpha)=A\,\Phi(t-\alpha)=A\,\Omega_2(t)$. Από το μονοσήμαντο των λύσεων $\Omega_1(t)=\Omega_2(t)$ δηλαδή $\Phi(t-\alpha)=\Phi(t)\Phi^{-1}(\alpha)$.

Τα δύο προηγούμενα αποτελέσματα οδηγούν στο ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα: Η λύση $x(\cdot)$ της $x' = Ax + b(t)$, $t \in I$ που ικανοποιεί την $x(0) = x_0$ δίνεται από τον τύπο:

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-s)\, b(s)\, ds$$

Παράδειγμα:

$$x' = 2x + y + \text{συν}t$$
$$y' = 3x + 4y + t$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} \text{συν}t \\ t \end{pmatrix}$$

Η λύση $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, $\varphi(0) = (x_0, y_0)$ δίνεται από τον:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Phi(t)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \int_0^t \Phi(t-s)\begin{pmatrix} \text{συν}s \\ s \end{pmatrix} ds$$

όπου

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{5t} & -\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{5t} \\ -\frac{3}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{5t} & \frac{1}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{5t} \end{pmatrix}$$

Η λύση με $\varphi(0) = (x_0, y_0) = (1, 1)$ είναι:

$$x(t) = \frac{5}{8}e^t + \frac{1451}{2600}e^{5t} + \frac{5}{13}\text{ημ}t - \frac{11}{26}\text{συν}t + \frac{1}{5}t + \frac{6}{25}$$

$$y(t) = -\frac{5}{8}e^t + \frac{4353}{2600}e^{5t} - \frac{9}{26}\text{ημ}t + \frac{3}{13}\text{συν}t - \frac{2}{5}t - \frac{7}{25}$$

Ασκήσεις

1) Δίνεται το μη ομογενές σύστημα πρώτης τάξης:

$$x' = 3x - y + 1$$
$$y' = 4x - y + t$$

Δείξτε ότι οι $\varphi_1(t) = (e^t, 2e^t)$, $\varphi_2(t) = (te^t, -e^t + 2te^t)$ αποτελούν ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων. Βρείτε την λύση $\varphi(t)$ που ικανοποιεί την $\varphi(0) = (1, 0)$

2) Να βρεθεί ενα Θ.Σ.Λ για τα συστήματα:

α) $$x' = -x + 8y$$
$$y' = x + y$$

β) $$x' = x - y + z$$
$$y' = x + y - z$$
$$z' = -y + 2z$$

3) Βρείτε την γενική λύση του συστήματος:

$$x' = -3x + 2y + e^{-t}$$
$$y' = -2x + y + 1$$

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Στις περισσότερες περιπτώσεις συστημάτων είναι πολύ δύσκολη η εύρεση λύσεων (είτε σε κλειστή μορφή είτε σε μορφή δυναμοσειράς). Μπορούμε όμως να αναπτύξουμε μια ποιοτική θεωρία σχετικά με την γενική συμπεριφορά των λύσεων. Η θεωρία αυτή μπορεί να παρέχει πληροφορίες για την συμπεριφορά των λύσεων χωρίς να απαιτεί γνώση των λύσεων του συστήματος.

Ας θεωρήσουμε την δ.ε. δεύτερης τάξης:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \qquad (1)$$

Αν ένα σωμάτιο με $m=1$ κινείται στον άξονα των x και η δύναμη που ασκείται πάνω του είναι η $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ τότε η (1) περιγράφει την κίνηση του σωματίου.

Οι τιμές x (θέση) και $\frac{dx}{dt}$ (ταχύτητα) που σε κάθε στιγμή καθορίζουν την κατάσταση του συστήματος λέγονται φάσεις του συστήματος και το επίπεδο των μεταβλητών x και $\frac{dx}{dt}$ επίπεδο φάσεων. (Γενικά αν έχουμε περισσότερες φάσεις μιλούμε για χώρο φάσεων).

Αν θέσουμε $y = \frac{dx}{dt}$ τότε η (1) είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= f(x,y) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Θεωρώντας το t ως παράμετρο η λύση του (2) είναι ένα ζεύγος $(x(t), y(t))$ που ορίζουν μιά καμπύλη στο xy επίπεδο, δηλαδή στο επίπεδο φάσεων που αναφέραμε.

Γενικά μελετούμε συστήματα της μορφής:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x'(t) = F(x(t),y(t)) = F(x,y) \\ y' &= y'(t) = G(x(t),y(t)) = G(x,y) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

όπου $F(\cdot,\cdot)$, $G(\cdot,\cdot)$ συνεχείς και έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο επίπεδο xy.

Ένα σύστημα της μορφής (3) όπου οι F, G δεν εξαρτώνται από την μεταβλητή t άμεσα, λέγεται αυτόνομο.

Ας θεωρήσουμε το γραμμικό σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha x + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Όπως έχουμε αναφέρει, για $t_0 \in I$ και $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ υπάρχει μοναδική λύση $(x(t),y(t))$ τέτοια ώστε $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$. Αν οι $x(\cdot), y(\cdot)$ δεν είναι και οι δύο σταθερές συναρτήσεις τότε η $(x(t),y(t))$ ορίζει μιά καμπύλη στο επίπεδο φάσεων που λέγεται τροχιά του συστήματος.

Αν $(x(t),y(t))$ λύση του (4) τότε και η $(x(t+c),y(t+c))$ είναι λύση του (4) για κάθε c. (Αν $x_1(t)=x(t+c)$ τότε $x_1'(t)=x'(t+c)=\alpha x(t+c)+b y(t+c)=\alpha x_1(t)+b y_1(t)$, $y_1(t)=y(t+c)$, και με τον ίδιο τρόπο $y_1'(t)=c x_1(t)+d y_1(t)$, άρα $(x_1(t),y_1(t))$ λύση του (4)).

(η παραπάνω ιδιότητα δεν ισχύει για μη αυτόνομα συστήματα)

Κάθε τροχιά εκφράζεται παραμετρικά από πολλές λύσεις που διαφέρουν μεταξύ τους μόνο στην μετατόπιση της παραμέτρου t.

<u>Παράδειγμα:</u> Αν $c \in [0,2\pi]$ τότε οι $x(t)=\eta\mu(t+c)$, $y(t)=\sigma\upsilon\nu(t+c)$ παριστάνουν άπειρες διακεκριμένες λύσεις του συστήματος $x'=y$, $y'=-x$ αλλά την ίδια τροχιά: τον κύκλο $x^2+y^2=1$.

<u>Λήμμα</u>: Απο κάθε σημείο (x_0, y_0) του επιπέδου διέρχεται το πολύ μία τροχιά.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $C_1 : x = x_1(t), y = y_1(t)$ και $C_2 : x = x_2(t), y = y_2(t)$ δύο διαφορετικές τροχιές με κοινό σημείο το :

$$(x_0, y_0) = (x_1(t_1), y_1(t_1)) = (x_2(t_2), y_2(t_2))$$

$t_1 \neq t_2$ γιατί αν $t_1 = t_2$ ερχόμαστε σε αντίθεση με την μοναδικότητα των λύσεων. Αν $c = t_1 - t_2$ τότε η $x(t) = x_1(t + t_1 - t_2)$, $y(t) = y_1(t + t_1 - t_2)$ είναι λύση και $(x(t_2), y(t_2)) = (x_1(t_1), y_1(t_1)) = (x_0, y_0)$, άρα (από την μοναδικότητα των λύσεων) οι $(x(t), y(t))$ και $(x_2(t), y_2(t))$ ταυτίζονται. Συνεπώς η $C_2 : (x_2(t), y_2(t))$ ταυτίζεται με την τροχιά της λύσης $(x_1(t+c), y_1(t+c))$, που είναι η C_1. Άτοπο.

Ας εξετάσουμε τώρα την λύση $x(t) \equiv x_0$, $y(t) \equiv y_0$ του (3) όπου x_0, y_0 σταθερές. Τότε $x' = 0 = F(x_0, y_0)$ και $y' = 0 = G(x_0, y_0)$. Αντίστροφα, αν $F(x_0, y_0) = 0$, $G(x_0, y_0) = 0$ τότε προφανώς η $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$ είναι λύση του (3).

<u>Ορισμός</u>: Ενα σημείο (x_0, y_0) όπου $F(x_0, y_0) = 0 = G(x_0, y_0)$ λέγεται **κρίσιμο σημείο** του (3). Οποιοδήποτε άλλο λέγεται **ομαλό** σημείο.

- Τα κρίσιμα σημεία λέγονται επίσης ιδιάζοντα σημεία ή σημεία ισορροπίας.

Ας προσπαθήσουμε τώρα να σχηματίσουμε την ακόλουθη κινηματική εικόνα για να περιγράψουμε το επίπεδο φάσεων.

Θεωρήστε τα διανύσματα $V(x,y) = (F(x,y), G(x,y))$. Το (3) περιγράφει την κίνηση ενος σωματίου (x,y) με ταχύτητα $(x', y') = V(x,y)$ για κάθε (x,y). Οι τροχιές είναι οι καμπύλες πάνω στις οποίες κινείται το (υποθετικό) σωμάτιο, ανεξάρτητα από το σημείο εκκίνησης και με σταθερή κατεύθυνση που σημειώνεται με βέλη πάνω στην τροχιά.

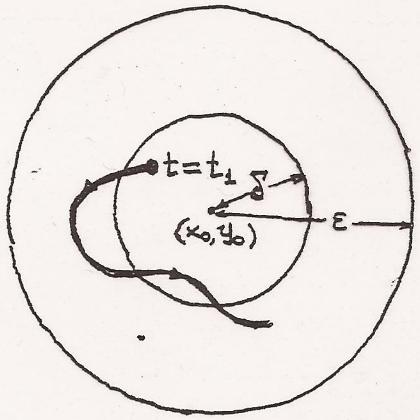
<u>Ορισμός</u>: Ένα κρίσιμο σημείο (x_0, y_0) του (3) λέγεται μεμονωμένο κρίσιμο σημείο αν υπάρχει περιοχή του (x_0, y_0) που δεν περιέχει άλλο κρίσιμο σημείο.

Ορίζουμε τώρα την έννοια της ευστάθειας ενός κρίσιμου σημείου ή ισοδύναμα της λύσης $x(t) \equiv x_0$, $y(t) \equiv y_0$.

<u>Ορισμός</u>: Έστω (x_0, y_0) μεμονωμένο κρίσιμο σημείο του (3). Το (x_0, y_0) λέμε ότι είναι ευσταθές αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε κάθε τροχιά του (3) που βρίσκεται στην δ-περιοχή την στιγμή $t = t_1$, ορίζεται για κάθε $t \geq t_1$ και παραμένει στην ε-περιοχή του (x_0, y_0) για $t > t_1$.

Αν επιπροσθέτως κάθε τροχιά που ικανοποιεί τα παραπάνω ικανοποιεί και τις: $\lim_{t \to \infty} x(t) = x_0$, $\lim_{t \to \infty} y(t) = y_0$ τότε λέμε ότι το (x_0, y_0) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

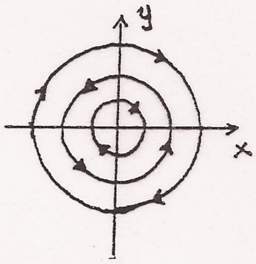
Τέλος, αν ένα μεμονωμένο κρίσιμο σημείο δεν είναι ευσταθές λέμε ότι είναι ασταθές.



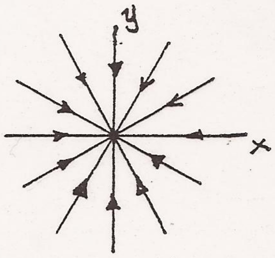
Παράδειγμα: Θεωρούμε τα συστήματα:

(α) $x' = y$, $y' = -x$ (b) $x' = -x$, $y' = -y$ (c) $x' = x$, $y' = y$

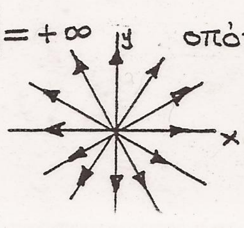
Στο (α) οι λύσεις είναι $x(t) = \alpha\,\eta\mu(t+c)$, $y(t) = \alpha\,\sigma\upsilon\nu(t+c)$, $\alpha > 0$ και οι τροχιές είναι η οικογένεια των κύκλων $x^2+y^2=\alpha^2$, $\alpha>0$.
Το $(0,0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο του (α) και συνεπώς είναι ένα μεμονωμένο κρίσιμο σημείο.
Έστω $\varepsilon>0$. Κάθε τροχιά με $(x(t_1), y(t_1)) \in S(0,\delta)$ με $\delta=\varepsilon$ παραμένει στην $S(0,\varepsilon)$ για $t \geqslant t_1$. Άρα το $(0,0)$ είναι ευσταθές.
Τα $\lim_{t\to\infty} x(t)$, $\lim_{t\to\infty} y(t)$ προφανώς δεν υπάρχουν άρα το $(0,0)$ δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.



(b) Οι λύσεις είναι $x(t) = x_0 e^{t_0-t}$, $y(t) = y_0 e^{t_0-t}$ και οι τροχιές είναι η οικογένεια ευθειών $y = \frac{y_0}{x_0}x$ και οι ευθείες $x=0, y=0$.
Το $(0,0)$ είναι μεμονωμένο κρίσιμο σημείο. Έχουμε $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$ και $\lim_{t\to\infty} y(t)=0$, συνεπώς κάθε τροχιά που εισέρχεται σε μιά περιοχή $S(0,\delta)$, $\delta=\varepsilon$ παραμένει σ' αυτή και προσεγγίζει συνεχώς το $(0,0)$. Άρα το $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.



(c) Οι λύσεις είναι $x(t) = x_0 e^{t-t_0}$, $y(t) = y_0 e^{t-t_0}$ και για $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ άρα για τροχιά διαφορετική από την $x(t)\equiv 0, y(t)\equiv 0$ έχουμε $\lim_{t\to\infty}|x(t)| = +\infty$ ή $\lim_{t\to\infty}|y(t)| = +\infty$ οπότε το σύστημα είναι ασταθές.



Γραμμικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές

Θα ασχοληθούμε τώρα με το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha x + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Εξετάζουμε αναλυτικά συστήματα της μορφής (4) γιατί οι λύσεις τους βρίσκονται σχετικά εύκολα και έτσι μπορούμε να έχουμε μια πλήρη περιγραφή του επιπέδου φάσεων. Επίσης πολλά μη γραμμικά συστήματα εκφράζονται στη μορφή:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha x + by + \varepsilon_1(x,y) \\ y' &= cx + dy + \varepsilon_2(x,y) \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Αν οι $\varepsilon_1(x,y)$, $\varepsilon_2(x,y)$ είναι αρκετά μικρές σε μιά περιοχή ενός κρίσιμου σημείου τότε υπάρχει η προσδοκία της όμοιας συμπεριφοράς των τροχιών του (5) με αυτή των τροχιών του (4), (τοπικά).

Το $(x_0,y_0)=(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο του (4) και υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν άλλα κρίσιμα σημεία. Αυτό ισοδυναμεί με $\alpha d - bc \neq 0$.
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του (4) είναι:

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} \alpha-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (\alpha+d)\lambda + (\alpha d - bc)$$

με ρίζες $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[(\alpha+d) \pm \sqrt{(\alpha-d)^2+4bc}\,\right]$

Άρα οι λύσεις του (4) είναι της μορφής: $x(t)=f(t)\,e^{\lambda_i t}$, $y(t)=g(t)\,e^{\lambda_i t}$ όπου f, g πολυώνυμα με βαθμό ≤ 1.

Για να διευκολυνθεί η μελέτη της συμπεριφοράς των τροχιών κοντά στο κρίσιμο σημείο $(0,0)$ είναι χρήσιμο να εφαρμόσουμε έναν γραμμικό μετασχηματισμό της μορφής:

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y \\ \eta &= \gamma x + \delta y \end{aligned} \qquad \text{ή ισοδύναμα} \qquad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

Το $(x,y)=(0,0)$ απεικονίζεται στο $(\xi,\eta)=(0,0)$.
Ένας μετασχηματισμός αυτής της μορφής έχει ως αποτέλεσμα την περιστροφή ή την μεγέθυνση (ή σμίκρυνση) των τροχιών, αλλά δεν μεταβάλλει την συμπεριφορά τους κοντά στο $(0,0)$.

Θα εξετάσουμε τώρα την συμπεριφορά των τροχιών ανάλογα με το είδος των ριζών λ_1, λ_2.

I. λ_1, λ_2 πραγματικές άνισες και $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$

- $(\alpha - d)^2 + 4bc > 0$

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $\begin{aligned} \xi &= cx + (\lambda_1 - \alpha)\cdot y \\ \eta &= cx + (\lambda_2 - \alpha) y \end{aligned}$

$$\begin{aligned} \xi' &= cx' + (\lambda_1-\alpha)y' = c\alpha x + cby + (\lambda_1 - \alpha)cx + (\lambda_1-\alpha)dy \\ &= \lambda_1 cx + y(cb - \alpha d) + \lambda_1 dy \qquad \text{όμως } \alpha d - bc = \lambda_1 \lambda_2 \\ &= \lambda_1 cx - \lambda_1\lambda_2 y + \lambda_1 dy = \lambda_1 cx + \lambda_1 dy - \lambda_1(\alpha + d - \lambda_1)y \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{γιατί } \lambda_1 + \lambda_2 = \alpha + d) \\ &= \lambda_1 cx + \lambda_1(\lambda_1 - \alpha)y = \lambda_1\big(cx + (\lambda_1 - \alpha)y\big) = \lambda_1 \xi \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο $\eta' = \lambda_2 \eta$. Συνεπώς αρκεί να εξετάσουμε το σύστημα:

$$(6) \begin{cases} x' = \lambda_1 x \\ y' = \lambda_2 y \end{cases}, \ \lambda_1 \neq \lambda_2, \ \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0, \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Οι λύσεις του συστήματος αυτού είναι: $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$, $y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$ όπου c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

(α) Οι λ_1, λ_2 έχουν το ίδιο πρόσημο $\quad \bullet\ \alpha d - bc > 0$

(i) λ_1, λ_2 αρνητικές $\quad \bullet\ \alpha + d < 0$

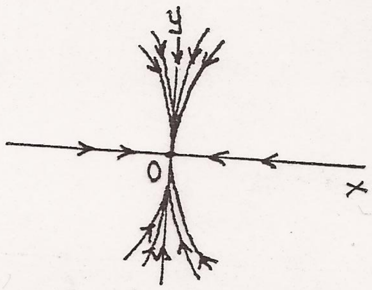
Αν $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ τότε $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$ δηλαδή $(x,y) \to (0,0)$ όταν $t \to +\infty$ και $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{y}{x} = \infty$

Για $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ έχουμε την τροχιά $x = 0$, $y = c_2 e^{\lambda_2 t}$ η οποία ακολουθεί τον άξονα των y και τα βέλη έχουν κατεύθυνση πρός το $(0,0)$.

Για $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$ έχουμε την τροχιά $x = c_1 e^{\lambda_1 t}$, $y = 0$ που ακολουθεί τον άξονα των x και τα βέλη έχουν κατεύθυνση προς το $(0,0)$.

Αν $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ τότε έχουμε τροχιές $x = y^{\lambda_1/\lambda_2} \cdot c$

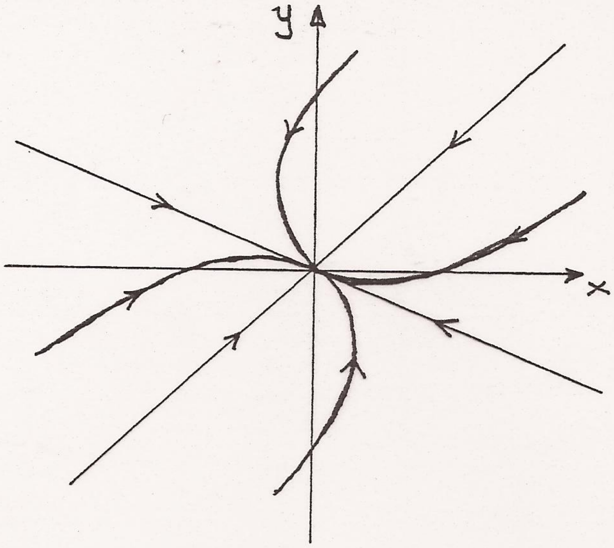
Στην περίπτωση (α) λοιπόν με $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ το επίπεδο φάσεων έχει την μορφή:



Τροχιές του (6) με $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

Αν $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ το παραπάνω διάγραμμα θα περιστραφεί κατα 90°.

Η μόνη διαφορά που θα εμφανισθεί στην παράσταση των τροχιών του (4) είναι ότι θα έχουμε περιστροφή του παραπάνω διαγράμματος και οι τροχιές για $c_1 = 0$, (αντιστ. $c_2 = 0$) δεν είναι αναγκαία κάθετες μεταξύ τους. Σε μιά τέτοια περίπτωση το $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{y}{x}$ είναι πραγματικός αριθμός και οι τροχιές έχουν την μορφή:



Στην περίπτωση (a)(i) το $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και λέγεται ευσταθής κόμβος.

(a) (ii) λ_1, λ_2 θετικές $\bullet\ \alpha+d>0$

Αν $0<\lambda_1<\lambda_2$ τα παραπάνω διαγράμματα περιστάνουν το επίπεδο φάσεων με τη διαφορά ότι τα βέλη έχουν αντίστροφη φορά. Αν $0<\lambda_2<\lambda_1$ έχουμε στροφή κατά $90°$.

Σ' αυτήν την περίπτωση λέμε ότι το $(0,0)$ είναι ένας ασταθής κόμβος.

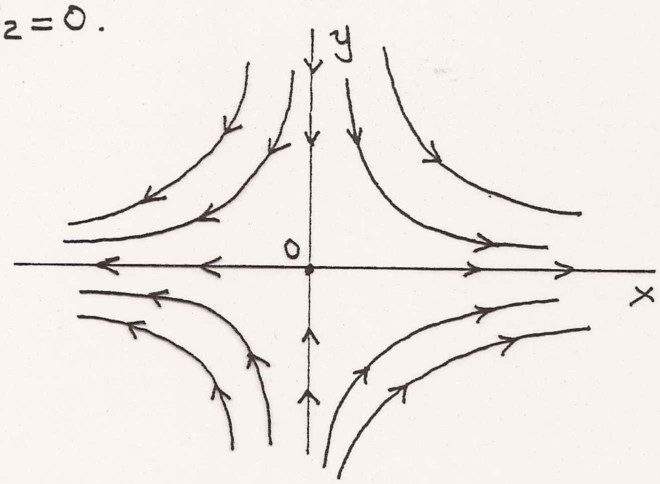
(b) Οι λ_1, λ_2 έχουν διαφορετικό πρόσημο : $\alpha d - bc < 0$

Αν $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ οι τροχιές για $c_1=0, c_2\neq 0$ είναι : $x=0$, $y=c_2 e^{\lambda_2 t}$ και $\lim\limits_{t\to\infty}(x(t),y(t))=(0,0)$ και για $c_1\neq 0, c_2=0$, $x=c_1 e^{\lambda_1 t}$, $y=0$ και $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=\pm\infty$

Αν $c_1>0$, $c_2<0$ τότε $(x,y)\to(+\infty,0)$ αν $t\to+\infty$ και $(x,y)\to(0,-\infty)$, όταν $t\to-\infty$. Ανάλογη ανάλυση μπορεί να γίνει για τις άλλες περιπτώσεις.

Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι το $(0,0)$ είναι σημείο σάγματος και προφανώς είναι ασταθές.

Το επίπεδο φάσεων έχει την ακόλουθη μορφή (με πιθανή στροφή ή αλλαγή της γωνίας των τροχιών με $C_1=0, C_2\neq 0$ και $C_1\neq 0, C_2=0$.



II. Οι λ_1,λ_2 είναι μιγαδικές συζυγείς $\bullet\ (\alpha-d)^2+4bc<0$
Τότε $\lambda_1=u+iv$, $\lambda_2=u-iv$ όπου u,v πραγματικοί.

Ο μετασχηματισμός
$$\xi = cx+(u-\alpha)y$$
$$\eta = vy$$

μετασχηματίζει το (4) στο $\xi'=u\xi-v\eta$, $\eta'=v\xi+u\eta$

Αρκεί λοιπόν να μελετήσουμε σύστημα της μορφής:

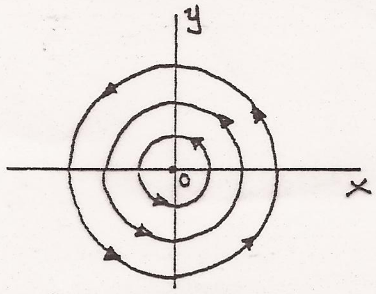
$$\left.\begin{aligned} x'&=ux-vy \\ y'&=vx+uy \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

(α) λ_1,λ_2 φανταστικοί $\bullet\ \alpha+d=0$

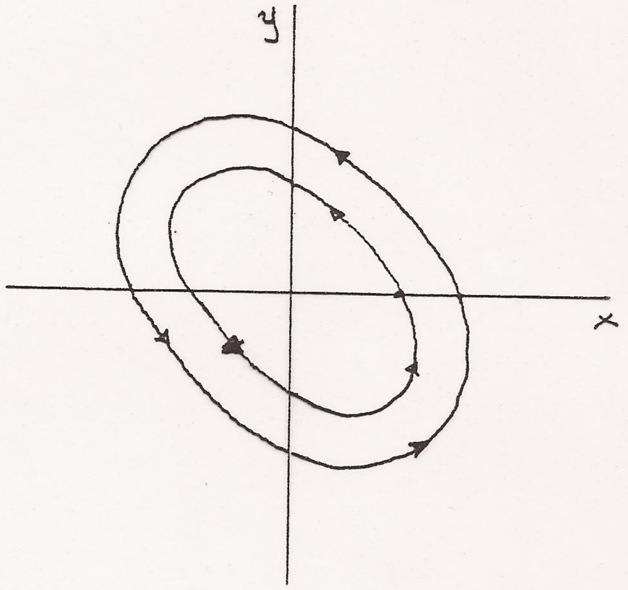
Τότε $\lambda_1=iv$, $\lambda_2=-iv$, $u=0$ και το (7) γίνεται

$$\left.\begin{aligned} x'&=-vy \\ y'&=vx \end{aligned}\right\}$$ με λύσεις $$x(t)=C_1\,\text{συν}(vt+\beta)$$ $$y(t)=C_1\,\eta\mu(vt+\beta)$$

Οι τροχιές είναι οικογένεια κύκλων: $x^2+y^2=C_1^2$



Σε αυτή την περίπτωση το $(0,0)$ λέγεται κ έ ν τ ρ ο και είναι ευσταθές αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές.
Οι τροχιές του (4) θα είναι οικογένεια ελλείψεων.



Για $y=0$ η (4) δίνει $y' = cx$. Για $x_0>0$ έχουμε $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(x_0,0)} > 0$ αν $c>0$ και $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(x_0,0)} < 0$ αν $c<0$.

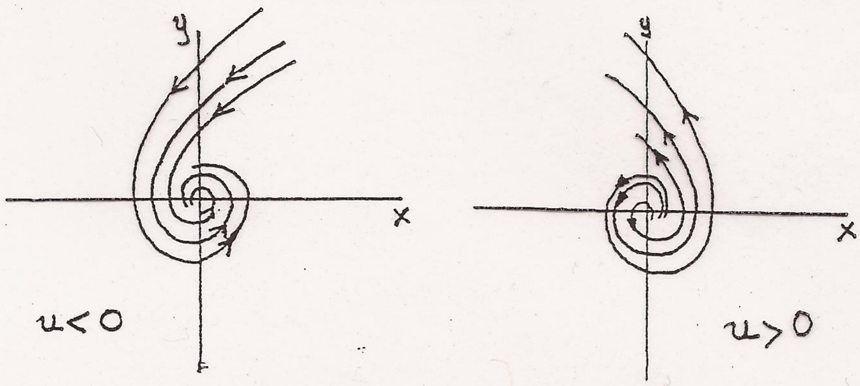
Άρα η κατεύθυνση των τροχιών ακολουθεί την φορά των δεικτών του ωρολογίου όταν $c<0$ και την αντίθετη όταν $c>0$.

(b) λ_1, λ_2 μιγαδικοί $\quad\bullet\ \alpha+d \neq 0$

Οι λύσεις του (7) είναι $x(t) = c_1 e^{ut} \,\sigma\upsilon\nu(vt+\beta)$

$$y(t) = c_1 e^{ut}\, \eta\mu(vt+\beta)$$

και οι τροχιές είναι η οικογένεια σπειρών : $x^2+y^2 = c_1^2 e^{2ut}$



Το κρίσιμο σημείο (0,0) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν $u<0$ και ασταθές αν $u>0$. Το (0,0) λέμε ότι είναι εστία.

III. Διπλή ρίζα $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{\alpha+d}{2} \neq 0 \ , \ (\alpha-d)^2 + 4bc = 0$

$\dfrac{\alpha+d}{2} \neq 0$ γιατί αν $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ τότε $\alpha d - bc = 0$ άτοπο

(a) $b = c = 0$ τότε $\alpha = d = u$ και το (4) γίνεται

$x' = ux \ , \ y' = uy$ με λύσεις $x(t) = c_1 e^{ut}, y(t) = c_2 e^{ut}$

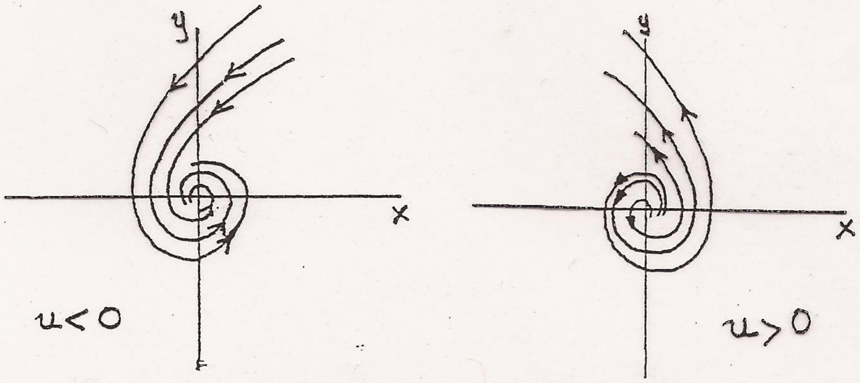
Οι τροχιές είναι οικογένεια ευθειών $y = \dfrac{c_2}{c_1} x$ και οι $x=0, y=0$.
Το (0,0) λέμε ότι είναι γνήσιος κόμβος και είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν $\alpha+d<0$, και ασταθές αν $\alpha+d>0$.

(b) λ_1, λ_2 μιγαδικοί • $\alpha+d \neq 0$

Οι λύσεις του (7) είναι $x(t)=c_1 e^{ut} \,\sigma\upsilon\nu(vt+\beta)$

$y(t)=c_1 e^{ut} \,\eta\mu(vt+\beta)$

και οι τροχιές είναι η οικογένεια σπειρών : $x^2+y^2=c_1^2 e^{2ut}$



Το κρίσιμο σημείο (0,0) είναι ασύμπτωτικά ευσταθές αν $u<0$ και ασταθές αν $u>0$. Το (0,0) λέμε ότι είναι εστία.

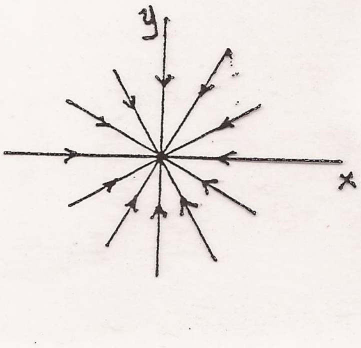
III. Διπλή ρίζα $\lambda_1=\lambda_2=\frac{\alpha+d}{2}\neq 0$, $(\alpha-d)^2+4bc=0$

$\frac{\alpha+d}{2}\neq 0$ γιατί αν $\lambda_1=\lambda_2=0$ τότε $\alpha d-bc=0$ άτοπο

(a) $b=c=0$ τότε $\alpha=d=u$ και το (4) γίνεται

$x'=ux$, $y'=uy$ με λύσεις $x(t)=c_1e^{ut}$, $y(t)=c_2e^{ut}$

Οι τροχιές είναι οικογένεια ευθειών $y=\frac{c_2}{c_1}x$ και οι $x=0, y=0$. Το (0,0) λέμε ότι είναι γνήσιος κόμβος και είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν $\alpha+d<0$, και ασταθές αν $\alpha+d>0$.



(b) Αν $b \neq 0$ τότε ο μετασχηματισμός:

$$\xi = \frac{\alpha - d}{2b} x + y \quad , \quad \eta = \frac{1}{b} x$$

μετασχηματίζει το (4) στο σύστημα: $\xi' = \frac{\alpha+d}{2}\xi$, $\eta' = \xi + \frac{\alpha+d}{2}\eta$

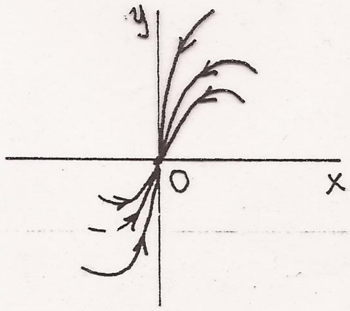
Αν $b=0$, $c \neq 0$ το (4) έχει ουσιαστικά την παραπάνω μορφή. (αντιστ. $b \neq 0$, $c=0$). Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε το σύστημα:

$$x' = u x$$
$$y' = x + u y$$

με λύσεις $x(t) = c_1 e^{ut}$, $y(t) = (c_1 t + c_2)\, e^{ut}$

Για $c_1 = 0$ οι τροχιές είναι ο άξονας των y.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{c_1 t + c_2}{c_1} = +\infty$$



Το (0,0) λέμε ότι είναι (μη γνήσιος) κόμβος και είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν $\alpha + d < 0$ και ασταθές αν $\alpha + d > 0$. Το επίπεδο φάσεων του (4) έχει παράσταση παρόμοια με το παραπάνω γράφημα (ίσως με στροφή του παραπάνω γραφήματος).

Οι περιπτώσεις I (a), III (b) λέμε ότι είναι μη γνήσιοι κόμβοι. Η διαφορά από τους γνήσιους κόμβους είναι οτι στον γνήσιο κόμβο οι τροχιές προσεγγίζουν ή απομακρύνονται από το (0,0) από κι προς όλες τις κατευθύνσεις, ενώ σταν μη γνήσιο κόμβο μόνον από ορισμένες κατευθύνσεις.

Συνοψίζουμε την ανάλυση όλων των προηγουμένων περιπτώσεων στο ακόλουθο θεώρημα:

<u>Θεώρημα</u>: Δίνεται το σύστημα $\begin{aligned} x' &= \alpha x + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned}$, $\alpha d - bc \neq 0$

όπου $\alpha, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Τότε το $(0,0)$ είναι μεμονωμένο κρίσιμο σημείο και είναι:

(i) ευσταθές αν οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $P(\lambda) = \lambda^2 - (\alpha + d)\lambda + (\alpha d - bc)$ είναι φανταστικές $(\pm i v)$

(ii) ασυμπτωτικά ευσταθές αν οι ρίζες του $P(\lambda)$ έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη $Re\lambda_1, Re\lambda_2 < 0$

(iii) ασταθές αν οι ρίζες έχουν θετικά πραγματικά μέρη $Re\lambda_1, Re\lambda_2 > 0$.

<u>Παραδείγματα</u>: (a) $\begin{aligned} x' &= -3x + y \\ y' &= 4x - 2y \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} x' &= 2x + y \\ y' &= x + 2y \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} x' &= 2x + 3y \\ y' &= x + y \end{aligned}$

(a) $(\alpha - d)^2 + 4bc = (-3+2)^2 + 4 \cdot 4 = 17 > 0$

$\alpha d - bc = (-3)(-2) - 4 = 2 > 0$

$\alpha + d = -3 - 2 = -5 < 0$

άρα το $(0,0)$ είναι ευσταθής κόμβος

(b) $(\alpha-d)^2+4bc = 4>0$ ἀρα το $(0,0)$ είναι

$\alpha d - bc = 2\cdot 2-1 = 3>0$ ασταθής κόμβος

$\alpha+d = 2+2 = 4>0$

(c) $(\alpha-d)^2+4bc = (2-1)^2+4\cdot 3\cdot 1 = 13>0$

$\alpha d - bc = 2\cdot 1 - 3\cdot 1 = -1<0$

ἀρα το $(0,0)$ είναι σημείο σάγματος

(d) $x' = -x+3y$ $\quad (\alpha-d)^2+4bc = (-2)^2+4\cdot 3\cdot(-2) = -20<0$

$y' = -2x+y$ $\quad \alpha+d = -1+1 = 0$

ἀρα το $(0,0)$ είναι κέντρο. Η κατεύθυνση του αύξοντος χρόνου είναι αυτή των δεικτων του ωρολογίου γιατί $c=-2<0$

(e) $x' = x-2y$ $\quad (\alpha-d)^2+4bc = 4^2+4(-2)\cdot 3 = -8<0$

$y' = 3x-3y$ $\quad \alpha+d = -2<0$, $c=3>0$

ἀρα το $(0,0)$ είναι ευσταθής εστία με κατεύθυνση αύξοντος χρόνου αντίστροφη των δεικτών του ωρολογίου.

(f) $x' = 2x+2y$ $\quad (\alpha-d)^2+4bc = (-1)^2+4\cdot 2\cdot(-1) = -7<0$

$y' = -x+3y$ $\quad \alpha+d = 2+3 = 5>0$, $c=-1<0$

ἀρα το $(0,0)$ είναι ασταθής εστία με κατεύθυνση αύξοντος χρόνου αυτή των δεικτών του ωρολογίου.

(g) $x' = -2x$ $\quad$ $b = c = 0$, $\alpha + d = -2 - 2 = -4 < 0$

$y' = -2y$

άρα το $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής γνήσιος κόμβος.

(h) $x' = 8x - y$ $\quad$ $b = -1 \neq 0$, $\alpha + d = 8 + 4 = 12 > 0$

$y' = 4x + 4y$

άρα το $(0,0)$ είναι ασταθής , μη γνήσιος κόμβος.

Ασκήσεις

1) Περιγράψτε τον τύπο και την ευστάθεια του κρίσιμου σημείου $(0,0)$ των ακόλουθων γραμμικών συστημάτων:

(a) $x' = 3x + 4y$, $y' = 2x + y$ $\quad$ (b) $x' = 3x$, $y' = 2x + y$ $\quad$ (c) $x' = x + 2y$, $y' = -2x + 5y$

(d) $x' = 3x - 2y$, $y' = 4x - y$ $\quad$ (e) $x' = x + 3y$, $y' = -6x + 5y$ $\quad$ (f) $x' = 3x + y$, $y' = -x + y$

2) Δίνεται το σύστημα:

$$x' = \alpha x + by, \quad y' = cx + dy, \qquad \alpha, b, c, d \in \mathbb{R}$$

με $\alpha d - bc = 0$.

Δείξτε ότι τα κρίσιμα σημεία του συστήματος ανήκουν σε μιά ευθεία ή κάθε σημείο είναι κρίσιμο σημείο.